

2.3.5 Ekvivalentní úpravy

Předpoklady: 020304

Př. 1: Vyřeš rovnice. Jaký je společný rys řešení všech příkladů?

a) $x + 125 = 217$

b) $x \cdot 3 = 951$

c) $x - \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

d) $\frac{x}{6} = 122$

a) $x + 125 = 217$
 $x = 217 - 125 = 92$

b) $x \cdot 3 = 951$
 $x = 951 : 3 = 317$

c) $x - \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
 $x = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{6}{9} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$

d) $\frac{x}{6} = 122$
 $x = 122 \cdot 6 = 732$

Ve všech bodech určujeme x pomocí opačné operace, než která byla původně na levé straně.

Pedagogická poznámka: První příklad představuje krátké opakování. Nečekám, že by bod b) v druhém příkladu někdo vypočítal, přesto je důležitý. Provádění ekvivalentních úprav rovnic je pro žáky problém, protože (minimálně v první fázi) velmi komplikovaně (z jejich pohledu) řeší něco, co jsou schopni spočítat z paměti. Bod b) by jim měl demonstrovat, že ne všechno je tak jednoduché a jejich postup má určité limity. Nechávám jim cca 5 minut a několik pokusů o výsledek. Pak bod b) příklad spočítám na tabuli a bavíme se o tom, co podnikneme dál.

Př. 2: Vyřeš rovnice: a) $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$

b) $\frac{x}{2} - 1 = 3x - 3$

a) $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7} \quad / : \frac{2}{3}$
 $x = \frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$

b) $\frac{x}{2} - 1 = 3x - 3 \quad / \cdot 2$
 $x - 2 = 6x - 6 \quad / +6$
 $x - 2 + 6 = 6x \quad / -x$
 $4 = 6x - x$
 $4 = 5x$
 $x = \frac{4}{5}$

Snadno se přesvědčíme, že výsledek je správný:

Levá strana: $\frac{4}{5} - 1 = \frac{4}{5 \cdot 2} - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$

Pravá strana: $3 \cdot \frac{4}{5} - 3 = \frac{12}{5} - \frac{15}{5} = -\frac{3}{5}$

Na obou stranách vyšlo stejné číslo, našli jsme správné x .

Co znamenají čísla za rovnicí? Jak víme, které kroky udělat?

Vrátíme se na začátek. Proč se všechny operace v prvním příkladu obrací?

Vysvětlení najdeme u hromádek. Jakou operací jsme vždycky začínali?

Vyškrtnali jsme stejné papírky na obou hromádkách.

Př. 3: Co znamená v řeči rovnic vyškrtnání stejných papírků v obou hromádkách? Ukaž na příkladě.

$$KKXX \quad XKT \qquad 1+1+x+x = x+1+3$$

$$KX \quad T \qquad 1+x = 3$$

$$X \quad D \qquad x = 3-1 = 2$$

Vyškrtnání stejných papírků znamená odečtení stejného čísla od obou stran rovnice. V našem příkladu jsme vyškrtnli na obou hromádkách:

- papírek $K \Rightarrow$ stejné jako bychom u rovnice odčetli od obou stran číslo 1,
- papírek X (žolík) \Rightarrow stejné jako bychom u rovnice odčetli od obou stran číslo x .

Stejným způsobem můžeme postupovat i u normální rovnice: $x+5=11$. Vlevo máme u x číslo 5, které ale není s čím vyškrtnout, protože napravo je 11. Stačí, když nás napadne, že platí: $11=5+6$ (5 potřebujeme a 6 je zbytek z 11).

Napíšeme si rovnici s rozloženým číslem 11: $x+5=6+5$.

Vyškrtneme 5 na obou stranách: $x=6$. Rozklad byl trochu zbytečný, když si uvědomíme, že na pravé straně zůstane číslo 6, které vznikne tím, že od 11 odečteme 5, které potřebujeme na vyškrtnutí.

Předchozí úprava dobře popisuje řešení příkladu 1 a) $x+125=217 \Rightarrow x=217-125=92$.

Levá strana původní	Levá strana upravená	Pravá strana původní	Pravá strana upravená
$x+125$	x	217	217-125
	odečetli jsme 125		odečetli jsme 125

Od obou stran rovnice jsme odečetli číslo 125 (vlevo jsme osamostatnili x a vpravo jsme získali výraz, který je sice složitější, ale dokážeme ho vyčíslit).

To, že jsme s oběma stranami udělali to samé, není překvapivé. Rovnítko znamená, že na obou stranách je to samé (stejná čísla) \Rightarrow pokud chceme, aby čísla zůstala stejná, musíme od nich odečíst to samé.

Úprava se při řešení rovnic píše většinou takto:

$x+125=217$	/ -125	chceme vlevo jenom $x \Rightarrow$ odečteme 125 (od obou stran), aby x zůstalo vlevo osamocené a rovnost se zachovala.
x	$+0$	odečítáme od obou stran (obou čísel, která se rovnají) číslo 125, modrá čísla na levé straně se dohromady rovnají nule.
$x+125-125=217-125$		
$x=92$		

Protože jsme provedli s oběma stranami to samé (odčetli jsme stejné číslo 125), fakt rovnosti se nezměnil, říkáme, že jsme provedli **ekvivalentní úpravu odečtení stejného čísla**.

Pokud od obou stran rovnice odečteme (nebo k nim přičteme) stejné číslo, rovnost se zachovává.

Podobně můžeme interpretovat i bod c).

$$x \cdot 3 = 951 \quad / : 3$$

$$x \cdot \overbrace{3:3}^1 = \frac{951}{3} = 92$$

$$x = 92$$

chceme vlevo jenom $x \Rightarrow$ dělíme obě strany 3, aby x zůstalo vlevo osamocené a rovnost se zachovala.

dělíme obě strany (obě čísla, která se rovnají) číslem 3, modrá čísla na levé straně se dohromady vykrátí.

Vypadá to zbytečně krkolomně, ale dají se tím snadno a stejně řešit i příklady, které nám

dělaly problémy, například $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$.

$$\frac{2}{3}x = \frac{5}{7} \quad / : \frac{2}{3}$$

$$x \cdot \overbrace{\frac{2}{3} : \frac{2}{3}}^1 = \frac{5}{7} : \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$$

chceme vlevo jenom $x \Rightarrow$ dělíme obě strany zlomkem $\frac{2}{3}$, aby x zůstalo vlevo osamocené a rovnost se zachovala.

dělíme obě strany (obě čísla, která se rovnají) číslem $\frac{2}{3}$, modrá čísla na levé straně se dohromady vykrátí.

Že jsme počítali správně, si ověříme snadno: $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{14} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{5}{7}$.

Pokud obě strany rovnice vynásobíme (vydělíme) nenulovým číslem, rovnost se zachovává.

Př. 4: Vyřeš zbývající rovnice s prvního příkladu pomocí ekvivalentních úprav.

c) $x - \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

d) $\frac{x}{6} = 122$

c) $x - \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad / + \frac{2}{3}$

$$x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{6}{9} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

d) $\frac{x}{6} = 122 \quad / \cdot 6$

$$\frac{x}{6} \cdot 6 = 122 \cdot 6$$

$$x = 732$$

Pedagogická poznámka: Jak už bylo uvedeno v minulé hodině na formalismu řešení rovnic není prostor k objevování. Proto trvám na tom, aby žáci řešili rovnice tak jako já (zápis operace za lomítko, kompletní levá strana). Při prvním průchodu jsem tak striktní nebyl, ale zdá se, že to nepřineslo žádné výhody, spíše se ukázalo, že štábní kultura části žáků naopak chybí.

Př. 5: Vyřeš rovnice pomocí ekvivalentních úprav.

a) $15 + x = -7$

b) $7x = 161$

c) $x - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{x}{3} = 15$

e) $x + 28 = 12$

f) $x : 5 = 11$

a) $15 + x = -7 \quad / -15$

$$15 - 15 + x = -7 - 15$$

$$x = -22$$

b) $7x = 161 \quad / :7$

$$\frac{7x}{7} = \frac{161}{7}$$

$$x = 161 : 7 = 23$$

c) $x - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \quad / +\frac{3}{4}$

$$x - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

d) $\frac{x}{3} = 15 \quad / \cdot 3$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 15 \cdot 3$$

$$x = 45$$

e) $x + 28 = 12 \quad / -28$

$$x + 28 - 28 = 12 - 28$$

$$x = -16$$

f) $x : 5 = 11 \quad / \cdot 5$

$$x : 5 \cdot 5 = 11 \cdot 5$$

$$x = 55$$

Pedagogická poznámka: Pokud následující příklad nestihneme zůstává za domácí úkol.

Př. 6: Vyřeš rovnice pomocí ekvivalentních úprav.

a) $x - 3 = -5$

b) $4x = 24$

c) $x + \frac{1}{2} = 2$

d) $\frac{x}{5} = 35$

e) $x + 12 = 5 + 7$

f) $\frac{2}{3}x = 14$

g) $x + \frac{3}{5} = -\frac{1}{2}$

h) $2x + 11 = 5$

a) $x - 3 = -5 \quad / +3$

$$x - 3 + 3 = -5 + 3$$

$$x = -2$$

b) $4x = 24 \quad / :24$

$$\frac{4x}{4} = \frac{24}{4}$$

$$x = 6$$

c) $x + \frac{1}{2} = 2 \quad / -\frac{1}{2}$

$$x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

d) $\frac{x}{5} = 35 \quad / \cdot 5$

$$\frac{x}{5} \cdot 5 = 35 \cdot 5$$

$$x = 175$$

e) $x + 12 = 5 + 7 \quad / -12$

$$x + 12 - 12 = 5 + 7 - 12$$

$$x = 0$$

f) $\frac{2}{3}x = 14 \quad / : \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{3} \cdot x = 14 : \frac{2}{3} = 14 \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3}{2} = 21$$

g) $x + \frac{3}{5} = -\frac{1}{2} \quad / -\frac{3}{5}$

$$x + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = -\frac{5}{10} - \frac{6}{10}$$

$$x = \frac{-5-6}{10} = -\frac{11}{10} = -1\frac{1}{10}$$

h) $2x + 11 = 5 \quad / -11$

$$2x + 11 - 11 = 5 - 11$$

$$2x = -6 \quad / :2$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-6}{2}$$

$$x = -3$$

Shrnutí: Postupným přičítáním, odečítáním, násobením a dělením obou stran rovnice stejným číslem postupně osamostatňujeme neznámou.