

2.3.12 Proměnná II

Předpoklady: 020311

Př. 1: Vyřeš rovnice.

$$\text{a) } \frac{3x-2}{4} = 5$$

$$\text{b) } \frac{x}{3} + 2 = 3x + 4 - x$$

$$\text{a) } \frac{3x-2}{4} = 5 \quad / \cdot 4$$

$$3x - 2 = 20 \quad / +2$$

$$3x = 22 \quad / :3$$

$$x = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \frac{x}{3} + 2 = 3x + 4 - x$$

$$\frac{x}{3} + 2 = 2x + 4 \quad / \cdot 3$$

$$x + 6 = 6x + 12 \quad / -x$$

$$6 = 5x + 12 \quad / -12$$

$$-6 = 5x \quad / :5$$

$$x = -\frac{6}{5}$$

Pedagogická poznámka: V příkladu 2 a v příkladu 3 dojde většina žáků k výsledkům bez použití proměnné a rovnic jedním z uvedených způsobů, bez toho, aby vyřešili úkol nají vyjádření pro libovolný počet týdnů. Obě uvedená řešení nechám někoho z žáků napsat na tabuli, probereme si jejich výhody a nevýhody a pak si ukážeme řešení s proměnnou.

Př. 2: Jakub šetří na tablet za 6 200 Kč. Zatím má našetřeno 2 600 Kč a nastupuje na brigádu (bude roznášet letáky). Každý týden tak vydělá 400 Kč. Kolik peněz bude mít po 1 týdnu? Kolik po třech týdnech? Najdi vyjádření, které umožní spočítat našetřené peníze po libovolném počtu týdnů. Za jak dlouho našetří celou částku? Bude mít někdy našetřeno přesně 5 000 Kč?

Nejčastější dvě z možných řešení:

Tabulka zachycující našetřenou částku po měsících

počet měsíců	našetřená částka v Kč
1	3 000
2	3 400
3	3 800
4	4 200
5	4 600
6	5 000
7	5 400
8	5 800
9	6 200

V tabulce můžeme najít odpovědi na otázky:

- Po 1 týdnu bude mít našetřeno 3 000 Kč.
- Po 3 týdnech bude mít našetřeno 3 800 Kč.

- Celou částku našetří za 9 týdnů.
- Přesně 5 000 Kč bude mít našetřeno za 6 týdnů.

Řešení příkladu přímým výpočtem:

Po 1 týdnu: $2\,600 + 400 = 3\,000$ Kč.

Po 3 týdnech: $2\,600 + 3 \cdot 400 = 3\,800$ Kč.

Celou částku našetří: $6\,200 - 2\,600 = 3\,600$

$3\,600 : 400 = 9 \Rightarrow$ Jakub celou částku našetří za 9 týdnů.

Kdy našetří 5 000 Kč?

$5\,000 - 2\,600 = 2\,400$

$2\,400 : 400 = 6 \Rightarrow$ Přesně 5 000 Kč Jakub našetří za 6 týdnů.

Zatím jsme nevyřešili jeden z úkolů v předchozím příkladu: Najdi vyjádření, které umožní spočítat našetřené peníze po libovolném počtu týdnů.

Vrátíme se k řešení přímým výpočtem:

- Po 1 týdnu: $2\,600 + 1 \cdot 400 = 3\,000$ Kč.
- Po 3 týdnech: $2\,600 + 3 \cdot 400 = 3\,800$ Kč.

Podobným způsobem bychom mohli zapsat našetřenou částku i po jiném počtu týdnů, například po sedmi týdnech: $2\,600 + 7 \cdot 400 = 4\,400$ Kč.

Ve všech případech počítáme „stejně“: $2\,600 + \text{počet týdnů} \cdot 400$.

Stačí označit počet týdnů neznámou (písmenkem), například t :

Po t týdnech: $2\,600 + t \cdot 400$

Teď můžeme snadno vyřešit i další otázky:

Celou částku našetří, až bude mít 6200: $2\,600 + t \cdot 400 = 6\,200 \quad / -2\,600$

$400t = 6\,200 - 2\,600$

$400t = 3\,600 \quad / : 400$

$t = 9$

Celou částku našetří za 9 měsíců.

Zajímavý postřeh: Provádění ekvivalentních úprav nás nutí provádět stejné výpočty jako při přímém výpočtu. Nemusíme však přemýšlet, jak postupovat.

Bude mít někdy přesně 5000 Kč?

$2\,600 + t \cdot 400 = 5\,000 \quad / -2\,600$

$400t = 5\,000 - 2\,600$

$400t = 2\,400 \quad / : 400$

$t = 6$

Přesně 5000 Kč bude mít za 6 měsíců.

Př. 3: Míra s Frantou vedou taneční kroužek. Do kroužku chodí a na vystoupení se připravuje 24 dívek. Na vystoupení je třeba pořídit několik věcí:

a) pro každou dívku čokoládku za 5 Kč a tričko za 60 Kč,

- b) pro každou dvojici dívek švihadlo za 50 Kč,
- c) pro každou čtveřici kruh za 320 Kč,
- d) pro každou šestici stuhu za 180 Kč.

Kolik celkem zaplatí za potřebné vybavení? Kolik by zaplatili, kdyby došlo k avizovanému rozšíření počtu členů v kroužku na 36 členů? Kolik by vybavení stálo pro 48 nebo 72 tanečnic?

Výdaje pro 24 dívek:

$$24 \cdot 5 + 24 \cdot 60 + 12 \cdot 50 + 6 \cdot 320 + 4 \cdot 180 = 120 + 1440 + 600 + 1920 + 720 = 4\,800 \text{ Kč.}$$

Určení výsledku bylo dost namáhavé. Jak si ulehčit práci při výpočtu pro zbývající počty členů?

Pro 24 dívek ... 4 800 Kč

Pro 1 dívku: ... $4\,800 : 24 = 200$ Kč

Nyní stačí jen násobit částku pro jednu dívku počtem dívek:

- 36 dívek: $36 \cdot 200 = 7\,200$ Kč
- 48 dívek: $48 \cdot 200 = 9\,600$ Kč
- 72 dívek: $72 \cdot 200 = 14\,400$ Kč

Stejný výsledek bychom získali, kdybychom od začátku počítali částku potřebnou pro n dívek:

- pro každou dívku čokoládku za 5 Kč a tričko za 60 Kč: $5n + 60n$,
- pro každou dvojici dívek švihadlo za 50 Kč: $\frac{n}{2} \cdot 50$,
- pro každou čtveřici kruh za 320 Kč: $\frac{n}{4} \cdot 320$,
- pro každou šestici stuhu za 180 Kč: $\frac{n}{6} \cdot 180$.

Všechny částky sečteme a výraz zjednodušíme:

$$5n + 60n + \frac{n}{2} \cdot 50 + \frac{n}{4} \cdot 320 + \frac{n}{6} \cdot 180 = n(5 + 60 + 25 + 80 + 30) = n \cdot 200$$

Získali jsme stejný závěr jako při řešení příkladu: potřebné finanční prostředky získáme tak, že počet účastnic vynásobíme dvěma sty.

Př. 4: Jirkovi je j let. Pro Petra, který je o tři roky starší můžeme napsat, že je mu :
 $p = j + 3$ let. Zapiš podobným způsobem, kolik let je:

- a) Aniče, která je dvakrát starší,
- b) Barboře, která je o pět let mladší,
- c) Ttiradovi, jestliže Jirka je o dva roky mladší,
- d) Davidkovi, jehož věk je třetina věku Jirky,
- e) Evě, která je o polovinu starší než Jirka,
- f) Filipovi, který je o třetinu mladší.

Všechny body ověř tím, že budeš předpokládat, že Jirkovi je 12 let.

a) Aniče, která je dvakrát starší: $a = 2 \cdot j$

Ověření: $a = 2 \cdot j = 2 \cdot 12 = 24$ (OK, platí $24 = 2 \cdot 12$).

b) Barboře, která je o pět let mladší: $b = j - 5$

Ověření: $b = j - 5 = 12 - 5 = 7$ (OK, platí $12 = 7 + 5$).

c) Ctiradovi, jestliže Honzík je o dva roky mladší: $c = j + 2$ (Honzík je mladší)

Ověření: $c = j + 2 = 12 + 2 = 14$ (OK, platí $14 = 12 + 2$).

d) Davídkovi, jehož věk je třetina věku Honzy: $d = \frac{j}{3}$ (jiné možnosti $d = \frac{1}{3}j = j : 3$)

Ověření: $d = \frac{1}{3} \cdot j = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ (OK, platí $12 : 3 = 4$).

e) Evě, která je o polovinu starší než Honza: $e = j + \frac{1}{2}j = \frac{3}{2}j = \frac{3j}{2}$

Ověření: $e = j + \frac{1}{2}j = 12 + \frac{12}{2} = 18$ (OK, platí $12 + 12 : 2 = 18$).

f) Filipovi, který je o třetinu mladší: $f = j - \frac{1}{3}j = \frac{2}{3}j = \frac{2j}{3}$

Ověření: $f = \frac{2}{3}j = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ (OK, platí $12 - 12 : 3 = 8$).

Pedagogická poznámka: V bodu e) se velmi často objevuje chybný výsledek $e = j + \frac{1}{2}$.

Nejprve vyzývám žáky, aby si zkusili dosadit za j nějaký konkrétní věk, pak se bavíme, co tento zápis znamená (Eva je o půl roku starší). Podobná chyba pak bývá v bodu f), proto po opravě bodu e) nechávám chvíli na kontrolu bodu f).

Př. 5: Pan Moudrý s panem Zelendou opět řeší hádanku se dvěma hromádkami. Na jednu hromádku dávají papírky jednoho druhu, na druhou papírky druhého druhu. Opět našli nekonečně mnoho řešení, která popsali výrazy $5n + 1$ a $2n + 1$. Jaké druhy papírků na hromádky přikládají? Jakým způsobem mohou být dorovnané hromádky na začátku? Hledej všechna řešení.

Označíme papírky jednoho druhu X , druhého druhu Y .

Řešení jsou popsána výrazy $5n + 1$ a $2n + 1 \Rightarrow$ na jednu hromádku přikládáme $XXXXX$ na druhou $YY \Rightarrow$ pět kartiček X má stejnou hodnotu jako dvě kartičky $Y \Rightarrow 5 \cdot X = 2 \cdot Y \Rightarrow$ dvě možnosti:

- $X = 2 = D, Y = 5 = B$,
- $X = 4 = C, Y = 10 = P$
- (další možnosti existují pouze pro čísla, ale ne pro kartičky).

Ověření pro $X = 2 = D, Y = 5 = B$

Základní počet (bez příložen): $D \quad B \Rightarrow$ hromádky nejsou vyrovnané \Rightarrow na levé hromádce musí být další kartičky o celkové hodnotě 3, například jedno Trio.

$DT \quad B$

Po prvním přiložení: $DDDDD DT \quad BB B$ (vyrovnáno).

Po druhém přiložení: $DDDDD DDDDD DT \quad BB BB B$ (vyrovnáno).

...

Ověření pro $X = 4 = C, Y = 10 = P$

Základní počet (bez přiložení): $C \quad P \Rightarrow$ hromádky nejsou vyrovnané \Rightarrow na levé hromádce musí být další kartičky o celkové hodnotě 6, například dvě Tria.

$CTT \quad P$

Po prvním přiložení: $CCCCC CTT \quad PP P$ (vyrovnáno).

Po druhém přiložení: $CCCCC CCCCC CTT \quad PP PP P$ (vyrovnáno).

...

Shrnutí: