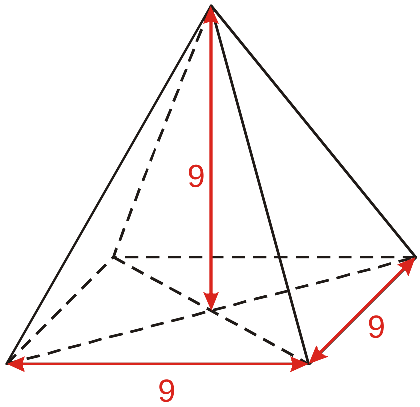
2.3.11 Vzorce I

Předpoklady: 020310

Pedagogická poznámka: V hodině nechám žáky řešit první dva příklady, pak si řekneme výsledky a spočítáme, kolik lidí udělalo chybu v prvním příkladu a kolik v druhém. Poměrně jasně se ukáže, že slovní popisy složitějších postupů rychle přestávají být srozumitelné (v posledním průchodu jsme v prvním příkladu měli dvě početní chyby, ani jednu chybu v postupu, v druhém příkladu bylo chyb v postupu asi osm).

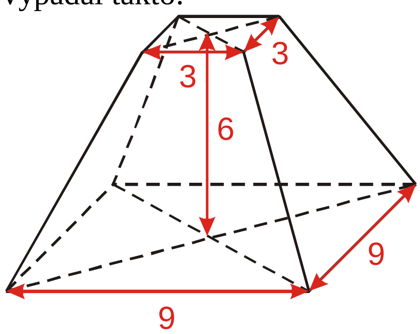
Př. 1: Dušan se rozhodl, že si na zahradě postaví něco speciálního. Dlouho přemýšlel a nakonec si vybral betonovou pyramidu.



Aby věděl, kolik musí objednat betonu, začal počítat její objem podle následujícího slovního popisu z prastaré moudré knihy: "Vezmi délku základny a vynásob ji samu se sebou, vzniklé číslo násob ještě výškou pyramidy a výsledek, který takto získáš, vyděl třemi."
Vypočti objem jeho pyramidy.

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = 243$$

Př. 2: Ještě než začal betonovat, dozvěděli se o jeho stavbě sousedé. Vysoká pyramida se jim nelíbila a tak Dušana nahlásili na stavebním úřadu. Po dlouhém jednání s úřady získal stavební povolení, ale musel se vzdát špičky pyramidy. Plán stavby nyní vypadal takto:

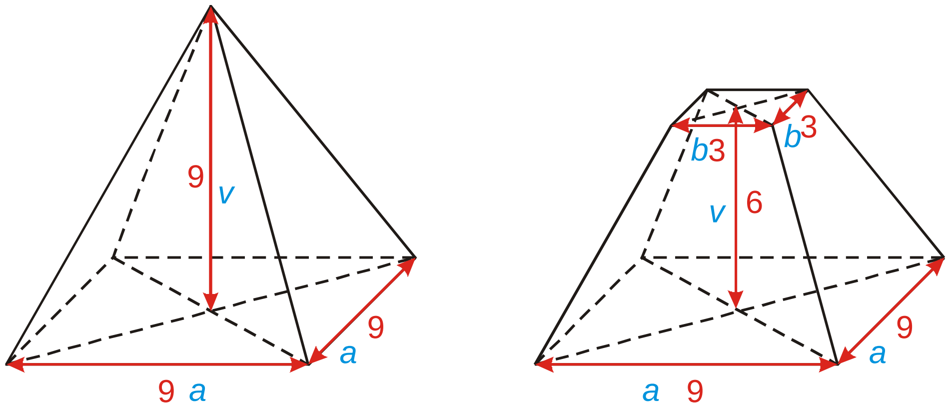


Dušan otevřel prastarou knihu, vyhledal popis a začal počítat: "Objem pyramidy s useknutým vrcholem vypočteš v několika krocích. Nejdříve vynásob délku dolní základny samu se sebou, pak vynásob délku horní základny samu se sebou a nakonec

vynásob délku dolní základny s délkou horní základny. Takto získáš tři čísla, která musíš společně sečíst. Tak získáš číslo čtvrté, které ještě vynásobíš výškou a výsledek vydělíš třemi.
Vypočti objem useklé pyramidy.

Nejdříve vynásob délku dolní základny samu se sebou: $9 \cdot 9 = 81$.
vynásob délku horní základny samu se sebou: $3 \cdot 3 = 9$.
vynásob délku dolní základny s délkou horní základny: $9 \cdot 3 = 27$.
Získaná tři čísla musíš společně sečíst: $81 + 9 + 27 = 117$.
Čtvrté číslo vynásobíš výškou a výsledek vydělíš třemi: $117 \cdot 6 : 3 = 234$.

Př. 3: Počítání nebylo jednoduché a trvalo dlouho, než Dušan dospěl vícekrát ke stejnému výsledku. Nakonec si byl Dušan svým výpočtem jistý, ale když ho hrdě ukázal v betonárce, všichni se smáli, až se za břicho popadali. Pak si vzali jeho obrázky, něco do nich dokreslili a vrátili mu je se slovy: "To musela být hodně stará knížka, dneska se to dělá takhle".



$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot v \qquad V = \left(a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b\right) \cdot \frac{v}{3}$$

Spočti objemy jejich způsobem.

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \text{ m}^3 = 243 \text{ m}^3$$

$$V = \left(a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b\right) \cdot \frac{v}{3} = \left(9 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 9 \cdot 3\right) \cdot \frac{6}{3} \text{ m}^3 = 234 \text{ m}^3$$

Zápis postupu nějakého výpočtu pomocí matematických operací a proměnných nazýváme **vzorec**.
Výpočet pomocí vzorce probíhá ve dvou krocích:

- dosadíme do vzorce (místo proměnných napíšeme konkrétní hodnoty),
- vypočteme (většinou pomocí kalkulačky nebo počítače) číselný výraz.

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \text{ m}^3 = 243 \text{ m}^3$$

$$V = \left(a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b\right) \cdot \frac{v}{3} = \left(9 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 9 \cdot 3\right) \cdot \frac{6}{3} \text{ m}^3 = 234 \text{ m}^3$$

Př. 4: Najdi způsob, jak zkontrolovat, že výsledky příkladu 3 jsou zřejmě správné.

Spočteme objem pyramidy, kterou jsme usekli z vrcholu, a mělo by platit, že její objem je rozdíl spočtených objemů.

$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \text{ m}^3 = 9 \text{ m}^3$

Platí: $243 - 9 = 234 \Rightarrow$ vzorce zřejmě platí.

Př. 5: Kolik by měl Dušan zaplatit za beton, když m^3 betonu stojí 2000 Kč?

$234 \cdot 2000 = 468000 \text{ Kč}$

Př. 6: Napiš vzorec pro obvod *o* a obsah *S* čtverce o straně *a*.

$o = 4a$

$S = a \cdot a = a^2$

Př. 7: Napiš vzorec pro obvod *o* a obsah *S* obdélníku se stranami *a*, *b*.

$o = 2a + 2b = 2(a + b)$

$S = ab$

Př. 8: Napiš vzorec pro objem *V* a povrch *P* krychle o straně *a*.

$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

$P = 6a \cdot a = 6a^2$

Př. 9: Napiš vzorec pro objem a povrch kvádru se stranami *a*, *b*, *c*.

$V = abc$

$P = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$

Př. 10: Dušan se nakonec rozhodl raději pro bazén. Naplánoval ho velkoryse 20 x 10 m, hloubka vody 1,5 metru. Kolik zaplatí za jeho napuštění, když m^3 vody stojí 75 Kč?

$V = abc = 20 \cdot 10 \cdot 1{,}5 \text{ m}^3 = 300 \text{ m}^3$

Cena: $300 \cdot 75 = 22\,500 \text{ Kč}$

Dušan zaplatí za jedno napuštění bazénu 22 500 Kč.

Př. 11: Na délce i hloubce svého bazénu Dušan kvůli plavání trvá. Jak musí být bazén široký, aby jedno napuštění nestálo více než 6000 Kč?

Možný objem bazénu: $6000 : 75 = 80 \text{ m}^3$.

$a = \frac{V}{bc} = \frac{80}{20 \cdot 1{,}5} = 2{,}7 \text{ m}$

Bazén musí být široký maximálně 2,7 m, aby jeho napuštění nestálo více než 6000 Kč.

Shrnutí: Početní postupy můžeme přehledně a elegantně zapisovat pomocí vzorců.