

2.5.3 Rozšiřování a krácení poměru

Předpoklady: 020503

Př. 1: Děti zjišťovaly poměr mezi výškou a šířkou papíru A4. Které z následujících poměrů jsou správné? Které jsou přibližně správné? Které jsou špatné?

a) 99:70 b) 7:5 c) 30:25 d) 14:10 e) 36:24

Jaký bude poměr mezi výškou a šířkou papíru A5?

Správné rozměry strany formátu A4: 297 cm × 210 cm ⇒ poměr: 297:210.

Zkusíme poměr zkrátit: 297:210 = 99:70 (dál už krátit nemůžeme) ⇒ jediným správným poměrem je poměr a) 99:70.

Zkusíme spočítat hodnoty všech poměrů a podle nich rozhodnout o přibližné rovnosti.

99:70 = 1,41428... 7:5 = 1,4 30:25 = 6:5 = 1,2

14:10 = 4:5 = 1,4 36:24 = 3:2 = 1,5

Záleží na tom, co ještě považujeme za přibližnou rovnost. Pokud budeme nároční jsou správnému poměru přibližně rovny ještě poměry b) 7:5 a d) 14:10. U poměru e) 36:24 by možná šlo diskutovat.

List formátu A5 vznikne přeložením formátu A4 a rozstříhnutím na dvě shodné poloviny ⇒ formát A5 má stejný tvar a tedy i stejný poměr výšky a šířky.

Př. 2: Najdi na internetu předepsané rozměry formátu A4 a ostatních formátů řady A. Jak se mění poměr výška:šířka u těchto formátů? Proč?

Formát	A0	A1	A2	A3	A4	A5
Poměr	1189:841	841:594	594:420	420:297	297:210	210:148
Hodnota	1,413...	1,415...	1,414...	1,414...	1,4,14...	1,419...

Hodnota poměru se příliš nemění (malé změny jsou způsobeny zaokrouhlováním rozměrů na celé milimetry), protože všechny řady A mají takové velikosti, aby dvě stránky menšího formátu daly dohromady jednu stránku většího formátu. Všechny stránky tak musejí mít stejný tvar.

Př. 3: Vysvětli, co znamená termín „základní tvar poměru“? Jak ho určíme?

Mnoho různých vysvětlení toho samého.

Základní tvar poměru:

- udává poměr pomocí „nejmenších čísel“,
- čísel, která nemají žádného společného dělitele kromě jedničky),
- není možné krátit,
- je analogie základního tvaru zlomku,
- ...

Základní tvaru určíme tak, že poměr zkrátíme.

Pedagogická poznámka: Není od věci po této diskusi (stejně jako po jiných diskusích), nechat žáky napsat bez sešitu co je základní tvar poměru jako minutovku.

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu nemusí všichni spočítat všechno.

Pomalejší žáky je třeba přerušit, aby stihli spočítat příklad 5. V příkladu jde o dvě věci, jednak, že je úplně jedno, jaký typ čísla do poměru napíšeme a vždy se postupuje stejně, za druhé jde o opakování zápisů zlomku a desetinných čísel včetně některých pravidel pro počítání s nimi.

Př. 4: Rozděľ poměry do skupin, které mají stejnou hodnotu. Pro každou skupinu najdi poměr v základním tvaru.

a) $9:15$ b) $2,4:4,2$ c) $0,036:0,06$ d) $\frac{2}{5}:0,72$ e) $\frac{1}{5}:\frac{9}{25}$
f) $\frac{1}{55}:\frac{1}{33}$ g) $1\frac{3}{5}:2\frac{4}{5}$ h) $(13+47):(124-19)$ i) $5:3^2$

Nejjednodušším postupem je převedení všech poměrů na základní tvar. Poměry se stejným základním tvarem mají stejnou hodnotu.

a) $9:15 = 3:5$

b) $2,4:4,2 = 24:42 = 4:7$

c) $0,036:0,06 = 36:60 = 6:10 = 3:5$

d) $\frac{2}{5}:0,72 = 0,4:0,72 = 40:72 = 5:9$

e) $\frac{1}{5}:\frac{9}{25} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{9} = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{9} = \frac{5}{9} = 5:9$

f) $\frac{1}{55}:\frac{1}{33} = \frac{1}{55} \cdot \frac{33}{1} = 33:55 = 3:5$

g) $1\frac{3}{5}:2\frac{4}{5} = 1,6:2,8 = 16:28 = 4:7$

h) $(13+47):(124-19) = 60:105 = 12:21 = 4:7$

i) $5:3^2 = 5:9$

Poměry můžeme rozdělit do tří skupin:

- skupina $3:5$ - $9:15$; $0,036:0,06$; $\frac{1}{55}:\frac{1}{33}$,
- skupina $4:7$ - $2,4:4,2$; $1\frac{3}{5}:2\frac{4}{5}$; $(13+47):(124-19)$,
- skupina $5:9$ - $\frac{2}{5}:0,72$; $\frac{1}{5}:\frac{9}{25}$; $5:3^2$.

- Př. 5:** Při kontrole bylo prohlédnuto 36 výrobků, z nich bylo 6 vadných.
- Jaký je poměr mezi vadnými a funkčními výrobky?
 - Celá zásilka obsahuje 912 výrobků. Kolik z nich bude funkčních, jestliže se poměr vadný a funkčních výrobků nezmění?
 - Kolik výrobků musíme koupit, abychom mohli předpokládat, že budeme mít k dispozici 60 funkčních?
 - Mezi kolika výrobky se dá očekávat 10 nefunkčních výrobků?

a) Jaký je poměr mezi vadnými a funkčními výrobky?

36 výrobků, 6 vadný \Rightarrow 30 funkčních \Rightarrow poměr vadný a funkčních je $6:30 = 1:5$.

b) Celá zásilka obsahuje 912 výrobků. Kolik z nich bude funkčních, jestliže se poměr vadný a funkčních výrobků nezmění?

Poměr $1:5 \Rightarrow$ 6 dílů.

$912:6 = 152 \Rightarrow$ 1 díl 152 výrobků.

5 dílů ... $5 \cdot 152 = 760$ funkčních výrobků.

c) Kolik výrobků musíme koupit, abychom mohli předpokládat, že budeme mít k dispozici 60 funkčních?

60 funkčních představuje 5 dílů

1 díl ... $60:5 = 12$ (také počet vadných)

Celkem výrobků ... $60 + 12 = 72$.

Musíme koupit 72 výrobků.

d) Mezi kolika výrobky se dá očekávat 10 nefunkčních výrobků?

10 nefunkčních představuje 1 díl

Všechny výrobky 6 dílů ... $6 \cdot 10 = 60$ výrobků.

10 nefunkčních výrobků se dá očekávat mezi 60 výrobky.

Dodatek: Čísla vypočtená v bodech c) a d) jsou správné hodnoty vypočtené v matematickém příkladu, ale v běžném životě jsou pouze odhadem skutečného výsledku. Při nákupu výrobků vybíráme zřejmě náhodně (a chybné výrobky se mezi všemi vyskytují zřejmě také náhodně) a proto se nám může stát, že budeme muset koupit více nebo méně než 72 výrobků, abychom jich měli 60 (podle toho, zda máme "šťastnou" nebo "smolnou" ruku. Číslo 72 tak není přesnou hodnotou, která bude v praxi vždy platit, ale nejlepším odhadem, od kterého se jednotlivé výsledky při různých nákupech mohou lišit.

Pedagogická poznámka: Diskuse o dodatku by se měla ve třídě objevit. Nejlépe třeba tak, že se zeptáte, proč v zadání bodu c) není napsáno pouze "Kolik výrobků musíme koupit, abychom měli k dispozici 60 funkčních?".

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad se dá počítat i mírně odlišnými způsoby. V žádném případě by jeho řešení nemělo sklouznout do z vnějšku vynuceného postupu. Naopak v případě, že má žák problémy, je třeba se ptát: Kolik je dílů? Kterých výrobků je 912? ...

Př. 6: Při tělocvičném vystoupení je nutné vytvořit skupinky o 3 děvčatech a čtyřech klucích. Které z následujících počtů dívek (kluků) mohou při tomto vystoupení účinkovat?

Dívky: 9; 24; 35; 67; 110; 156; 777; 151603

Kluci: 12; 28; 50; 72; 124; 542; 15872

Kolik kluků bude vystupovat s 21 děvčaty? Kolik děvčat bude vystupovat s 48 kluky?

Poměr vystupujících dívek a kluků musí být $3:4 \Rightarrow$ může vystupovat například $6:8$, $9:12$, $12:16$, $30:40 \Rightarrow$ počet děvčat musí být dělitelný 3, počet hochů musí být dělitelný 4 (poměr vystupujících vznikne rozšířením základního poměru $3:4$).

Možné počty dívek: 9; 24; 156; 777.

Možné počty hoch: 12; 28; 72; 124; 15872.

21 děvčat, 3 děvčata v jedné skupině $\Rightarrow 21:3=7$ skupin, $7 \cdot 4=28$ kluků.

48 kluků, 4 kluci v jedné skupině $\Rightarrow 48:4=12$ skupin, $12 \cdot 3=36$ děvčat.

Pedagogická poznámka: Příklad 7 nekontrolujeme v hodině necháváme si ho na začátek příští hodiny. Žáci tak mají ještě šanci na domácí rozmyšlení.

Př. 7: Trojsložková mastička se skládá ze složek A, B a C. Složky A a B se mísí v poměru $2:3$, složky B a C v poměru $2:1$. Jak má lékárník smíchat mastičku dohromady?

Problém: Kdybychom míchali mastičku podle poměru $A:B=2:3$ potřebovali bychom složky B 3 díly, kdybychom míchali podle poměru $B:C=2:1$ potřebovali bychom složky B 2 díly, složky B nemůže být najednou 3 i 2 díly.

Poměr jde napsat pomocí různého počtu dílů

$A:B=2:3=4:6=6:9=8:12=...$

$B:C=2:1=4:2=6:3=$

Stejný počet dílů složky B najdeme v poměrech: $A:B=4:6$, $B:C=6:3 \Rightarrow$ trojsložkovou mastičku namícháme v poměru $A:B:C=4:6:3$ (nebo v poměru $A:B:C=8:12:6 ...$).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je domácí úkol pro ty, kterým dělal problém příklad 6.

Př. 8: Jirka přebíral padaná jablka, která nestihl odvézt do moštárny. Ze čtyř stejných přepravek vytrídil jeden a půl přepravky nahnilých jablek. Zbytek sice vyžadoval rychle zpracování, ale zatím byl požitelný.

a) Jaká část jablek není nahnilá?

b) Jaký je poměr zdravých a nahnilých jablek?

c) Jakou část jablek tvoří jablka nahnilá? Jakou jablka zdravá?

d) Kolik jablek musí přibližně vzít Jirka do ruky, aby vytrídil 35 zdravých?

e) Kolik zdravých jablek zřejmě vytrídil, zatímco vyhodil 24 nahnilých?

f) V poslední přepravce zůstalo posledních 48 jablek. Kolik z nich bude asi nahnilých a kolik zdravých?

a) Jaká část jablek není nahnilá?

4 přepravky celkem, 1,5 přepravky nahnilá \Rightarrow 2,5 přepravky zdravých.

b) Jaký je poměr zdravých a nahnilých jablek?

Poměr zdravá ku nahnilá: $2,5:1,5=25:15=5:3$.

c) Jakou část jablek tvoří jablka nahnilá? Jakou jablka zdravá?

Nahnilá jablka 3 díly z osmi $\Rightarrow \frac{3}{8}$ všech jablek. Zdravá jablka 5 dílů z osmi $\Rightarrow \frac{5}{8}$ všech jablek.

d) Kolik jablek musí přibližně vzít Jirka do ruky, aby vytřídil 35 zdravých?

35 zdravých ... 5 dílů
 $35 : 5 = 7$... 1 díl
8 dílů všech ... $8 \cdot 7 = 56$ jablek

Jirka musí vzít do ruky 56 jablek, aby vytřídil 35 zdravých.

e) Kolik zdravých jablek zřejmě vytřídil, zatímco vyhodil 24 nahnilých?

3 díly nahnilých ... 24 nahnilých
1 díl ... $24 : 3 = 8$
5 dílů zdravých ... $5 \cdot 8 = 40$ zdravých

Zatímco vyhodil 24 nahnilých jablek vytřídil 40 zdravých.

f) V poslední přepravce zůstalo posledních 48 jablek. Kolik z nich bude asi nahnilých a kolik zdravých?

8 dílů všech ... 48 jablek
1 díl ... $48 : 8 = 6$ jablek
3 díly nahnilých ... $3 \cdot 6 = 18$ jablek
5 dílů zdravých ... $5 \cdot 6 = 30$ jablek

Mezi 48 jablky by mělo být 18 nahnilých a 30 zdravých.

Shrnutí: Poměry můžeme rozšiřovat a krátit jako zlomky. Základní tvar poměru odpovídá základnímu tvaru zlomku a je často nejvýhodnější pro výpočty.