2.5.4 Postupný poměr

Předpoklady: 020503

Pedagogická poznámka: Na začátku hodiny se bavíme o řešení příkladu z minulé hodiny.

Př. 1: Trojsložková mastička se skládá ze složek A, B a C. Složky A a B se mísí v poměru 2:3, složky B a C v poměru 2:1. Jak má lékárník smíchat mastičku dohromady?

Problém: Kdybychom míchali mastičku podle poměru $A:B=2:3$ potřebovali bychom složky B 3 díly, kdybychom míchali podle poměru $B:C=2:1$ potřebovali bychom složky B 2 díly, složky B nemůže být najednou 3 i 2 díly.
Poměr jde napsat pomocí různého počtu dílů
$A:B=2:3=4:6=6:9=8:12=....$
$B:C=2:1=4:2=6:3=$
Stejný počet dílů složky B najdeme v poměrech: $A:B=4:6$, $B:C=6:3$ $\Rightarrow$ trojsložkovou mastičku namícháme v poměru $A:B:C=4:6:3$ (nebo v poměru $A:B:C=8:12:6$ ...).

Pedagogická poznámka: U dětí se objeví zřejmě i další řešení:

Složky B a C jsou v poměru 2:1 $\Rightarrow$ množství C je poloviční než množství B $\Rightarrow$ můžeme doplnit poměr mezi A a B na $A:B:C=2:3:1{,}5=4:6:3$.

Poměry si můžeme vyjádřit pomocí zlomků:

$$A:B=2:3 \Rightarrow A=\frac{2}{3}B$$

$$B:C=2:1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}B$$

Za B zvolíme jedna: $A:B:C=\frac{2}{3}:1:\frac{1}{2}=4:6:3$.

Během diskuse určitě padne, že počet dílů pro B je nejmenším společným násobkem počtu dílů v obou poměrech. Nepíšeme si to jako závěr, u žáků, kteří k tomu nedospěli sami, by se z toho stal mechanický postup.

Zápisu $A:B:C=4:6:3$ **říkáme postupný poměr.** Porovnáváme jím tři množství.

Pomocí složitějších postupných poměrů můžeme porovnávat i více množství najednou.

Př. 2: Čajová směs na srdeční arytmii (dle internetu tudíž bez záruky): 20 g listů Ostružiníku křovitého, 10 g kořenů Kozlíku lékařského, 10 g listů Máty peprné, 5 g Pelyňku pravého, 10 g Meduňky lékařské.
a) Zapiš pomocí postupného poměru, jak smíchat bylinky dohromady.
b) Jaké množství jednotlivých bylin bude třeba přidat k 12 gramům ostružiníku?

Směs ostružiník, kozlík, máta, pelyněk, meduňka: $20:10:10:5:10$. Postupný poměr můžeme zkrátit pěti: $4:2:2:1:2$.
12 g ostružiníku $\Rightarrow$ poměr v základním tvaru rozšiřujeme třikrát:

- kozlík: $2\cdot 3=6\,\text{g}$,
- máta: $2\cdot 3=6\,\text{g}$,

- pelyněk: $1\cdot 3 = 3\,\text{g}$,
- meduňka: $2\cdot 3 = 6\,\text{g}$.

Pedagogická poznámka: Mnoho žáků základní tvar poměru obchází a počítá rovnou: kozlíku je poloviční množství než ostružiníku (6 g), máty je stejně jako kozlíku (6 g), pelyňku je poloviční množství než máty (3 g), ...

Př. 3: Délky stran trojúhelníka mají poměr $1:2:3$. Obvod trojúhelníku je 18 cm. Urči délky jednotlivých stran.

Poměr stran $1:2:3$ $\Rightarrow$ celkem $1+2+3=6$ dílů .... 18 cm.
1 díl .... $18:6=3$ cm.
Délky stran: 3cm, 6 cm, a 9 cm, což je nesmysl, protože neplatí trojúhelníková nerovnost (součet dvou menších stran není větší než třetí strana).

Př. 4: Woodův kov je speciální slitina s teplotou tání $60°\text{C} - 70°\text{C}$, tvořená cínem, olovem, bizmutem a kadmiem v poměru $1:2:4:1$.
a) Kterého kovu je ve slitině nejvíc?
b) Kolik gramů jednotlivých kovů potřebujeme pro přípravu 1,6 kg slitiny? Zkontroluj správnost výsledku.

a) Kterého kovu je ve slitině nejvíc?
Nejvíce je ve slitině bizmutu (4 díly).

b) Kolik gramů jednotlivých kovů potřebujeme pro přípravu 1,6 kg slitiny?
Slitina obsahuje $1+2+4+1=8$ dílů … 1,6 kg
1 díl … $1{,}6:8=0{,}2$ kg
Hmotnosti kovů:
- cín – 1 díl: … 0,2 kg
- olovo – 2 díly … $2\cdot 0{,}2 = 0{,}4$ kg
- bizmut – 4 díly … $4\cdot 0{,}2 = 0{,}8$ kg
- kadmium – 1 díl … $0{,}2$ kg,

Hmotnosti všech kovů by měly dát dohromady hmotnost slitiny: $0{,}2+0{,}4+0{,}8+0{,}2=1{,}6$.

Pedagogická poznámka: Případné diskuse s váhajícími žáky musí směřovat k tomu, že jde v podstatě o stejnou situaci jako u normálního poměru a může se postupovat stejným způsobem.

Př. 5: Úhel α je dvakrát menší než úhel β a ten je třikrát menší než úhel γ. Zapiš poměry velikostí pomocí postupného poměru. Urči velikosti úhlů α, β, γ.

Poměry:
- α je dvakrát menší (β je dvakrát větší) $\alpha:\beta = 1:2$,
- $\beta:\gamma = 1:3 = 2:6$.

Postupný poměr: $\alpha:\beta:\gamma = 1:2:6$ $\Rightarrow$ celkem $1+2+6=9$ dílů ... $180°$.
1 díl ... $180°:9 = 20°$.
Velikosti úhlů:

- α : 1 díl $\Rightarrow$ $\alpha = 20°$,
- β : 2 díly $\Rightarrow$ $\beta = 2 \cdot 20° = 40°$,
- γ : 6 dílů $\Rightarrow$ $\gamma = 6 \cdot 20° = 120°$.

Vnitřní úhly trojúhelníka mají velikosti $\alpha = 20°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 120°$.

Př. 6: Ondra, Petra a Jirka si půjčili na hodinu vozítko Segway. Hodina pronájmu stojí 360 Kč. Ondra jezdi deset minut, Petra čtvrt hodiny a zbytek času si vozítko zabral Jirka. Za vypůjčení chtějí zaplatit spravedlivě (podle toho, jak dlouho vozítko používali). Kolik má kdo zaplatit?

Poměr využití by měl být stejný jako poměr zaplacených peněz.
Poměr času Ondra, Petra, Jirka: $10:15:35$.
Poměr můžeme zkrátit pěti: $2:3:7$.
Celkem $2+3+7=12$ dílů … 360 Kč.
1 díl ... $360:12=30$.
Rozpočítání peněz:

- Ondra: 2 díly: $2 \cdot 30 = 60$ Kč,
- Petra: 3 díly: $3 \cdot 30 = 90$ Kč,
- Jirka: 7 dílů: $7 \cdot 30 = 210$ Kč.

Ondra by měl zaplatit 60 Kč, Petra 90 Kč a Jirka 210 Kč.

Př. 7: Pepa s Honzou a Terezou si na školním výletě koupili los. Pepa zaplatil dvakrát tolik co Honza, a poměr částek, které zaplatili Tereza a Honza je $3:2$. Sestav postupný poměr a urči, kolik každý z nich dostane, pokud na los vyhráli 8100 Kč.

Poměr Pepa a Honza: $2:1=4:2=6:3=...$
Poměr Tereza a Honza: $3:2=6:4=9:6=...$

Společný poměr: Pepa, Honza, Tereza (Honza 2 díly): $4:2:3$.
Celkem $4+2+3=9$ dílů … 8100 Kč.
1 díl ... $8100:9=900$.
Rozpočítání peněz:

- Pepa: 4 díly: $4 \cdot 900 = 3600$ Kč,
- Honza: 2 díly: $2 \cdot 900 = 1800$ Kč,
- Tereza: 3 dílů: $3 \cdot 900 = 2700$ Kč.

Př. 8: Čtyřsložková mastička se skládá ze složek A, B, C a D. Složky A a B se mísí v poměru 1:2, složky B a C v poměru 3:5 a složky B a D v poměru 4:3. Jak má lékárník smíchat mastičku dohromady?

Ve všech třech poměrech vystupuje složka B, hledáme takový tvar poměrů, aby v nich složka B měla stejný počet dílů:

- $A:B=1:2=2:4=3:6=4:8=5:10=6:12=...$
- $B:C=3:5=6:10=9:15=12:20=...$
- $B:D=4:3=8:6=12:9=...$

Výsledný poměr: $A:B:C:D=6:12:20:9$.

Pedagogická poznámka: Rychlejší postup: Jednotlivé poměry: $A:B=1:2$, $B:C=3:5$, $B:D=4:3$ $\Rightarrow$ hledáme počet dílů, který je násobkem všech počtů složky B $\Rightarrow$ hledáme nejmenší společný násobek čísel 2, 3 a 4 $\Rightarrow$ všechny poměry mohou obsahovat 12 dílů složky B.

Shrnutí: Postupný poměr udává množství více složek. Pracujeme s ním stejně jako s obyčejných jednoduchým poměrem.