

2.5.7 Počítáme s poměry II

Předpoklady: 020504

Př. 1: Urči poměry uvedených hodnot.

- a) 1km , 750m b) 0,1m² , 5dm² c) 150cm , 2000mm
d) 25l , 0,75hl e) 300dm³ , 0,21m³ f) 1,5h , 50min

a) $1\text{km} = 1000\text{m}$, $750\text{m} \Rightarrow \frac{1000}{750} = \frac{100}{75} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ poměr 4:3.

b) $0,1\text{m}^2 = 10\text{dm}^2$, $5\text{dm}^2 \Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow$ poměr 2:1.

c) 150cm , $2000\text{mm} = 200\text{cm} \Rightarrow \frac{150}{200} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ poměr 3:4.

d) 25l , $0,75\text{hl} = 75\text{l} \Rightarrow \frac{25}{75} = \frac{100}{75} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ poměr 4:3.

e) 300dm^3 , $0,21\text{m}^3 = 210\text{dm}^3 \Rightarrow \frac{300}{210} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7} \Rightarrow$ poměr 10:7.

f) $1,5\text{h} = 90\text{min}$, $50\text{min} \Rightarrow \frac{90}{50} = \frac{9}{5} \Rightarrow$ poměr 9:5.

Př. 2: Před pololetím chodí žáci k učitelům škemrat o lepší známky. U paní profesorky Měkké uspějí přibližně tři pětiny všech škemralů, kteří chtějí zlepšit známku o jeden stupeň.

- a) Jaký je poměr mezi úspěšnými a neúspěšnými škemraly?
b) Kolik úspěšných zájemců se dá očekávat mezi 15 žadateli?
c) Paní učitelka odmítla 8 zájemců, kolik žáků přišlo s prosíkem?
d) O kolik by se zlepšil třídní průměr, kdyby si zažádali všichni žáci ve třídě.

a) Jaký je poměr mezi úspěšnými a neúspěšnými škemraly?

Uspějí tři pětiny žadatelů \Rightarrow neuspějí dvě pětiny žadatelů \Rightarrow poměr úspěšných a neúspěšných žadatelů je 3:2 (na jednotce nezáleží, pokud je stejná).

b) Kolik úspěšných zájemců se dá očekávat mezi 15 žadateli?

15 žadatelů ... 5 dílů (úspěšní i neúspěšní)

15:5 = 3 ... 1 díl

úspěšní (3 díly) ... 3·3 = 9 žadatelů

neúspěšní (2 díly) ... 3·2 = 6 žadatelů

mezi 15 žadateli se dá očekávat 9 úspěšných a 6 neúspěšných.

c) Paní učitelka odmítla 8 zájemců, kolik žáků přišlo s prosíkem?

neúspěšných 8 zájemců ... 2 díly
 $8 : 2 = 4$... 1 díl
 všichni žadatelé (5 dílů) ... $5 \cdot 4 = 20$
 Pokud paní učitelka odmítla 8 zájemců, přišlo za ní asi 20 škemralů.

d) O kolik by se zlepšil třídní průměr, kdyby si zažádali všichni žáci ve třídě.
 Kdyby paní učitelka vyhověla všem žadatelům, zlepšil by se průměr třídy o jeden stupeň,
 když vyhoví třem pětinaš zlepšil se průměr o tři pětiny.

Pedagogická poznámka: Nejbázlivější žáci píšou poměr $\frac{3}{5} : \frac{2}{5}$, chci po nich, aby ho převedli na základní tvar (bez zlomků a desetinných míst). Potom se bavíme, proč bylo ihned jasné, že poměr je $3 : 2$.
 U bodů b) a c) jde o to, aby si žáci uvědomili, kolik dílů přísluší k číslu ze zadání.
 Bod d) je kontroverzní. Žáci nejdříve tvrdí, že není možné ho vyřešit, někteří si pak zvolí konkrétní čísla a počítají ho s nimi. Části pak dojde, že řešení vlastně velmi jednoduché.

Pedagogická poznámka: bod b) se dá rychleji počítat jako $\frac{3}{5}$ z 15, tedy $\frac{3}{5} \cdot 15 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{5} = 9$.

Př. 3: Trojúhelník KLM je podobný s trojúhelníkem ABC v poměru $5 : 2$. Urči délky stran trojúhelníka KLM , jestliže pro trojúhelník ABC platí: $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm.

$a = |BC| = 4$ cm . Odpovídající strana LM . Poměr $ABC : KLM$ je $2 : 5$:

- $a = 4$ cm ... 2 díly
- $4 : 2 = 2$... 1 díl
- $(4 : 2) \cdot 5 = 10$... 5 dílů $\Rightarrow |LM| = 10$ cm.

Rychleji jsme mohli získat výsledek vynásobením původní délky zlomkem $\frac{5}{2}$.

Zbývající strany:

- $|KL| = \frac{5}{2} \cdot |AB| = \frac{5}{2} \cdot 7 = 17,5$ cm,
- $|KM| = \frac{5}{2} \cdot |AC| = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$ cm,

Trojúhelník KLM má délky stran $|KL| = 17,5$ cm, $|LM| = 10$ cm a $|KM| = 15$ cm.

Př. 4: Dopln chybějící čísla tak, aby platila rovnost. Najdi základní tvar poměru a urči jeho hodnotu na dvě desetinná čísla.

a) $4 : 6 = 12 : \square = \square : 48 = 1 : \square = \square : 9$

b) $21 : 15 = 63 : \square = \square : 10 = 35 : \square = \square : 1$

a) $4 : 6 = 2 : 3$ základní tvar, $2 : 3 \doteq 0,67$ hodnota poměru na dvě desetinná čísla.

- $4 : 6 = (4 \cdot 3) : (6 \cdot 3) = 12 : 18$,

- $4:6 = (4 \cdot 8):(6 \cdot 8) = 32:48,$
- $4:6 = (4:4):(6:4) = 1:1,5,$
- $4:6 = 2:3 = (2 \cdot 3):(3 \cdot 3) = 6:9,$

$$4:6 = 12:18 = 32:48 = 1:1,5 = 6:9.$$

b) $21:15 = 7:5$ základní tvar, $7:5 = 1,4$ hodnota poměru.

- $21:15 = (21 \cdot 3):(15 \cdot 3) = 63:45,$
- $21:15 = 7:5 = (7 \cdot 2):(5 \cdot 2) = 14:10,$
- $21:15 = 7:5 = (7 \cdot 5):(5 \cdot 5) = 35:25,$
- $21:15 = 14:10 = 1,4:1,$

$$21:15 = 63:45 = 14:10 = 35:25 = 1,4:1.$$

Pedagogická poznámka: Z mě neznámého důvodu se objevují žáci, kteří mají s příkladem velké problémy, protože při hledání čísla do obdélníku používají pouze vedlejší levý poměr (z poměru $4:6$ dopočítají $12:\square$, ale poměr $\square:48$ už počítají z poměru $12:\square$).

Př. 5: Jeden z podobných obdélníků má strany o délkách 10 cm a 12 cm, kratší strana druhého trojúhelníku má délku 8 cm. Urči zbývající stranu druhého obdélníku a poměr: a) velikostí b) obvodů c) obsahů obou obdélníků.

Poměr kratších stran: $10:8 = 5:4.$

Délka delší stran menšího obdélníku: $12 \cdot \frac{4}{5} = 9,6 \text{ cm}.$

a) poměr velikostí obdélníku první: druhý = $5:4.$

b) poměr obvodů je stejný jako poměr velikostí $5:4$

Ověření:

- První obdélník: $o = 2(a+b) = 2 \cdot (10+12) = 2 \cdot 22 = 44 \text{ cm}.$
- Druhý obdélník: $o = 2(a+b) = 2 \cdot (8+9,6) = 2 \cdot 17,6 = 35,2 \text{ cm}$
- Poměr obvodů: $44:35,2 = 22:17,6 = 220:176 = 110:88 = 55:44 = 5:4.$

c) obsahů obou obdélníků by měl být $25:16$ (druhá mocnina poměru velikostí stran).

Ověření:

- První obdélník: $S = ab = 10 \cdot 12 = 120 \text{ cm}^2.$
- Druhý obdélník: $S = ab = 8 \cdot 9,6 = 76,8 \text{ cm}^2$
- Poměr obsahů: $120:76,8 = 1200:768 = 300:192 = 75:48 = 25:16.$

Př. 6: Petr má dvakrát více zameškaných hodin, než Veronika. Kdyby Petr přesunul svých 12 hodin Veronice, měli by oba stejně (paní třídní profesorka to však nechce dovolit). Kolik zameškaných hodin má Petr a kolik Veronika?

Řešení úvahou:

Kdyby Petr přesunul svých 12 hodin Veronice, měli by oba stejně \Rightarrow Petr má původně o 24 hodin více než Veronika (přesunem mu 12 ubude a Veronice 12 přibude, aby měli stejně). Veronika musí mít původně také 24 hodin, aby přidáním 12 měla stejně jako Petr, kterému 12 uберeme.

Řešení pomocí neznámých a rovnic:

Petr má dvakrát více zameškaných hodin, než Veronika : $p = 2v$ (všude, kde můžeme napsat p , můžeme místo p napsat $2v$).

Kdyby Petr přesunul svých 12 hodin Veronice, měli by oba stejně: $p - 12 = v + 12$

Dosadíme do druhé rovnice $p = 2v$: $2v - 12 = v + 12 \quad / +12$

$2v = v + 24 \quad / -v$

$v = 24$

$p = 2v = 2 \cdot 24 = 48$

Petr má 48 zameškaných hodin, Veronika 24.

Př. 7: Tomáš se Štěpánkou vyrobili během ledna za trest dohromady mezi 30 a 40 kartónovými pětiúhelníky. Kolik jich vyrobila Štěpánka a kolik Tomáš, když poměr jejich počtů je 5 : 3 pro Tomáše?

Poměr vyrobených pětiúhelníků 5 : 3 \Rightarrow celkem 8 dílů \Rightarrow pokud sečteme počty pětiúhelníků, musíme získat číslo dělitelné 8 \Rightarrow 2 možnosti:

- celkem 32 pětiúhelníků ... 8dílů:

1 díl	...	$32 : 8 = 4$ pětiúhelníků,
5 dílů (Tomáš)	...	$5 \cdot 4 = 20$ pětiúhelníků,
3 díly (Štěpánka)	...	$3 \cdot 4 = 12$ pětiúhelníků.
- celkem 40 pětiúhelníků ... 8dílů:

1 díl	...	$40 : 8 = 5$ pětiúhelníků,
5 dílů (Tomáš)	...	$5 \cdot 5 = 25$ pětiúhelníků,
3 díly (Štěpánka)	...	$3 \cdot 5 = 15$ pětiúhelníků.

Tomáš vyrobil buď 20 nebo 25 pětiúhelníků, Štěpánka buď 12 nebo 15.

Př. 8: Věštba: Písemku na úměry bude v sekundě psát celkem 28 žáků. Nikdo nedostane horší známku než trojku a známky budou rozděleny v poměru 1 : 4 : 2 (jedničky : dvojky : trojky). Kolik bude jedniček, kolik dvojek a kolik trojek?

Rozdělení známek 1 : 4 : 2 \Rightarrow celkem 7 dílů.

7 dílů	...	28 žáků
1 díl (jedničky)	...	$28 : 7 = 4$ žáci
2 díly (trojky)	...	$4 \cdot 2 = 8$ žáků
4 díly (dvojky)	...	$4 \cdot 4 = 16$ žáků

Ze zítřejší písemky dostanou 4 žáci jedničku, 16 žáků dvojku a 8 žáků trojku.

Shrnutí: