

2.5.11 Přímá úměrnost II

Předpoklady: 020510

Př. 1: Jirka odebral za celý rok na zahradě pouze 300 kWh a zaplatil za 1575 Kč. Platí za kWh více nebo méně než je typická cena? Doplň pro jeho cenu za kWh tabulku. Jak můžeme spočítat cenu za libovolné množství odebrané energie, bez toho, abych měli vyplněnou celou tabulku?

energie [kWh]	0	1	2	3	4	6	10	11	19	31	x
cena [Kč]	0	5,25	10,50	15,75	21	31,5	52,5	57,75	99,75	162,75	$5,25 \cdot x$

Za 300 kWh zaplatil 1575 Kč \Rightarrow cena 1 kWh: $\frac{1575}{300} = 5,25$ Kč

- Cena za 19 kWh: $19 \cdot 5,25 = 99,75$ Kč.
- Cena za 31 kWh: $31 \cdot 5,25 = 162,75$ Kč.

Cenu za libovolné množství spotřebované energie spočteme tak, že počet kWh vynásobíme cenou za 1 kWh (5,25 Kč).

U přímé úměrnosti platí, že hodnoty jedné veličiny můžeme určit vynásobením druhé veličiny číslem (konstantou) \Rightarrow můžeme psát $y = 5,25 \cdot x$ nebo $y = 4,5 \cdot x$.

Čísla 5,25 nebo 4,5 označujeme jako **koeficienty přímé úměrnosti**.

Př. 2: Co označuje v předpisech $y = 5,25 \cdot x$ a $y = 4,5 \cdot x$ písmenko x ? Co označuje písmenko y ?

x - počet spotřebovaných kWh.

y - cena za spotřebované kWh.

Cena zaplacená za spotřebované kWh je určena počtem spotřebovaných kWh. V matematice říkáme, že **cena je závislá na spotřebě**. Tuto závislost v matematice často označujeme jako **funkci**, její zápis $y = 4,5 \cdot x$ pak jako **předpis funkce**.

Spočtená cena závisí na zvoleném počtu kWh. Proto označujeme:

- x jako nezávislou proměnnou (volíme si ji, její hodnota nezávisí na výpočtu),
- y jako závislou proměnnou (její hodnotu dopočteme v závislosti na zvoleném počtu kWh).

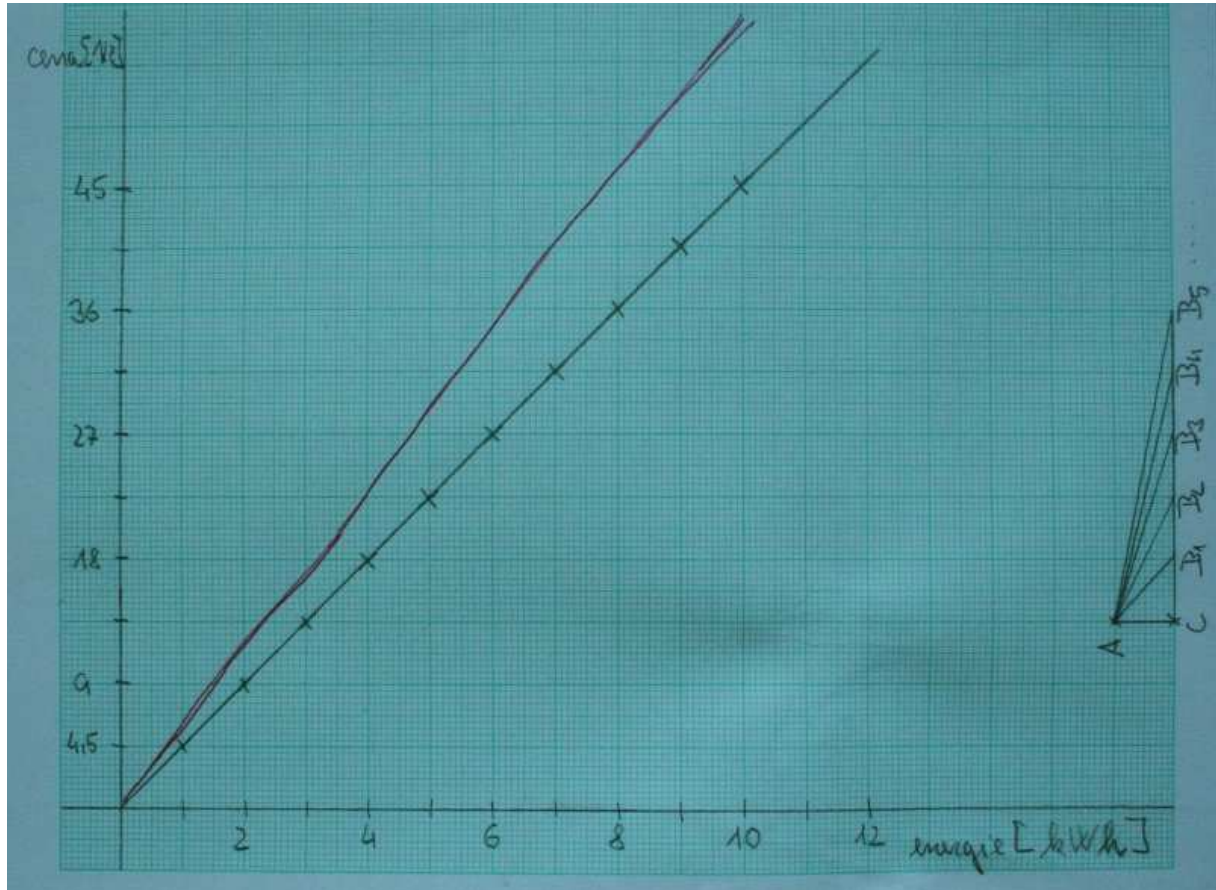
Označení nezávislé a závislé proměnné může být relativní. I v našem případě spotřeby elektrické energie si můžeme představit, že máme jen dopředu omezené množství peněz a musíme si spočítat kolik kWh můžeme spotřebovat, abychom je dokázali zaplatit.

Pokud jsou dvě veličiny přímo závislé, můžeme jejich závislost vyjádřit předpisem $y = k \cdot x$. Číslo k označujeme jako koeficient přímé úměrnosti.

Př. 3: Kolik Kč platí za 1 kWh Zdeněk, když závislost zaplacené ceny na počtu odebraných kWh je u něj popsána funkcí $y = 3,8 \cdot x$.

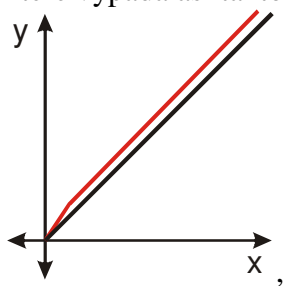
$y = 3,8 \cdot x \Rightarrow$ Zdeněk zaplatí a 1 kWh 3,80 Kč.

Př. 4: Načrtni (bez určování souřadnic výpočtem) do obrázku s grafem z minulé hodiny, graf pro závislost ceny, kterou platí za odebranou elektřinu Jirka.



Jirka platí za kWh více než je obvyklá cena \Rightarrow u stejného množství kWh má jeho graf větší hodnotu než graf pro typického odběratele. Rozdíl se neustále zvětšuje. Jirkův graf musí být také přímka (je to přímá úměrnost jen s jiným koeficientem).

Pedagogická poznámka: Kromě správného řešení se zřejmě objeví řešení s "rovnoběžkou", které vypadá asi takto:



Když žáky necháte, velmi rychle si vysvětlí, která z možností je správná.

Př. 5: Narýsuj milimetrový papír grafy přímých úměrností. Jak hodnota koeficientu ovlivňuje graf přímé úměrnosti?

- a) $y = 0,5x$ b) $y = 3x$ c) $y = x$ d) $y = 2x$

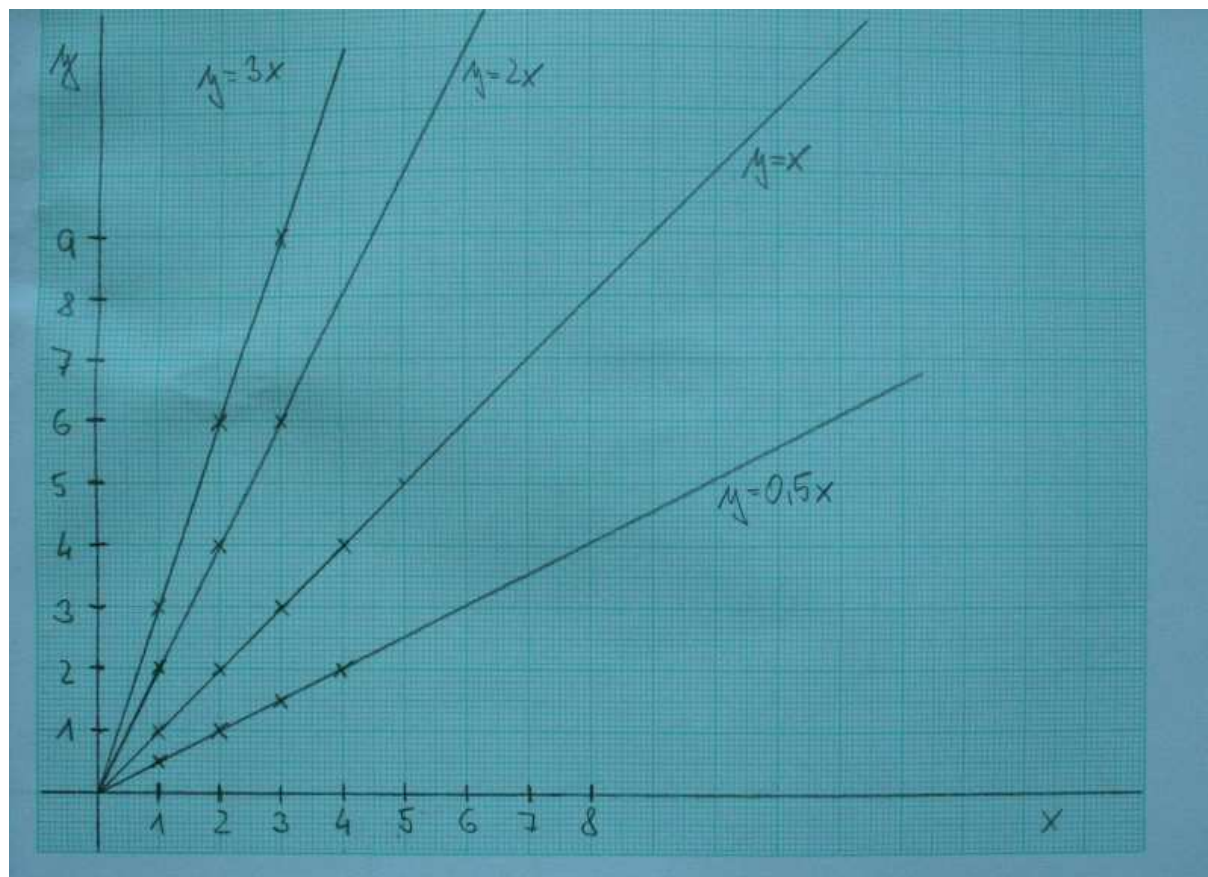
U každé přímé úměrnosti si můžeme spočítat několik bodů (ve skutečnosti stačí jeden jediný, protože graf musí vycházet z počátku).

x	0	1	2	4
$y = 0,5x$	0	0,5	1	2

x	0	1	2	3
$y = 3x$	0	3	6	9

x	0	1	2	4
$y = x$	0	1	2	4

x	0	1	2	3
$y = 2x$	0	2	4	6



Pedagogická poznámka: Trvám na tom, aby si žáci v obrázku nakreslili předpisy funkcí přímo ke grafům. Obvykle se je snaží popisovat pomocí číslic nebo písmen, ke kterým pak píšou vysvětlivky. Tento systém označování považuji za nešťastný, protože žáci ztrácejí přímou vazbu mezi předpisem a grafem.

Př. 6: Jsou uvedené veličiny přímo úměrné? Pokud jsou veličiny přímo úměrné jen za určitých podmínek, uveď za jakých.

- množství vody, která vyteče z kohoutku, a doba, po kterou ji použijeme,
- počet výherců a částka, která ze společné výhry připadá na každého z nich,
- počet hub, které najdeme, a doba strávená v lese při jejich hledání,
- tělesná výška a tělesná hmotnost,
- doba do příjezdu autobusu k zastávce a počet čekajících cestujících,
- velikost krychle a její objem.

a) množství vody, která vyteče z kohoutku, a doba, po kterou ji použijeme

Pokud voda vytéká z kohoutku pořád stejnou rychlostí, jsou veličiny přímo úměrné (čím déle voda teče, tím více ji z kohoutku vyteče).

b) počet výherců a částka, která ze společné výhry připadá na každého z nich

Nejde o přímo úměrnost. Čím více výherců se bude o výhru dělit, tím menší část na každého z nich připadne (úměrnost není přímá, ale obrácená).

c) počet hub, které najdeme, a doba strávená v lese při jejich hledání

Nejde o přímou úměrnost, houby nacházíme náhodně, většinou je bývají pohromadě, nemůžeme se spolehnout, že čím déle je budeme hledat, tím více jich najdeme.

d) tělesná výška a tělesná hmotnost

Nejde o přímou úměrnost. Někdo je malý a tlustý, někdo velký i hubený, rozhodně neplatí, že čím větší člověk, tím těžší.

e) doba do příjezdu autobusu k zastávce a počet čekajících cestujících

Určitě nejde o přímou úměrnost. Cestující přicházejí na zastávku náhodně, často tam ani žádný nedorazí. Navíc čekající přibývají na zastávce s tím, jak se čas do příjezdu autobusu krátí.

f) velikost krychle a její objem

Když krychli zvětšíme desetkrát, zvětší se její objem tisíckrát (například $1\text{ m} = 10\text{ dm}$, ale $1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3$) \Rightarrow nejde o přímou úměrnost.

Pedagogická poznámka: Při diskusi o bodu b) se určitě najde někdo, kdo si všimne, že jde o "obrácenou" úměrnost (čím více výherců, tím menší částka na jednoho). V tomto okamžiku to příliš nerozebíráme, a rozhodně nezavádíme nepřímou úměrnost.

Př. 7: Je rozloha státu přímo úměrná počtu obyvatel? Najdi údaje o alespoň šesti státech a rozhodni. Státy vol tak, aby byl Tvůj závěr co nejprůkaznější.

Hledáme státy o co nejružnějších velikostech i počtech občanů.

země	Vatikán	Kanada	Německo	Bangladéš	Austrálie	Belgie	Indie
obyvatelé	572	33,5 mil	80 mil	162 mil	22,6 mil	31 tis	3,3 mil
rozloha [km^2]	0,44	9,98 mil	350 tis	144 tis	7,7 mil	11 mil	1,2 mld
počet obyvatel na km^2	1300	3,26	225	1023	2,75	347	361

Z tabulky je zřejmé, že počet obyvatel není přímo úměrný rozloze státu (pokud by úměrný byl, musel by počet obyvatel na km^2 být u všech států stejný).

zdroj dat: Wikipedie

Shrnutí: Pokud jsou dvě veličiny přímo závislé, můžeme jejich závislost vyjádřit předpisem $y = k \cdot x$. Číslo k označujeme jako koeficient přímé úměrnosti.