2.5.1 Opakování - úměrnosti se zlomky

Př. 1: Spočti:

a) $\frac{4}{15}-\frac{2}{25}$ b) $\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{16}$ c) $\frac{50}{27}:\frac{20}{9}$

a) $\frac{4}{15}-\frac{2}{25}=\frac{4\cdot 5}{15\cdot 5}-\frac{2\cdot 3}{25\cdot 3}=\frac{20-6}{75}=\frac{14}{75}$

b) $\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{16}=\frac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 4\cdot 4}=\frac{9}{20}$ c) $\frac{50}{27}:\frac{20}{9}=\frac{50}{27}\cdot\frac{9}{20}=\frac{5\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 9\cdot 2\cdot 10}=\frac{5}{6}$

Př. 2: Přímá úměrnost má předpis $y=\frac{2}{5}x$. Doplň tabulku této přímé úměrnosti.

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	3	$\frac{10}{3}$			
y						1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$

Dosazujeme do vzorce: $y=\frac{2}{5}x$:

- $x=1$: $y=\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}$,
- $x=\frac{1}{2}$: $y=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$,
- $x=\frac{5}{3}$: $y=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$,
- $x=3$: $y=\frac{2}{5}\cdot 3=\frac{6}{5}$,
- $x=\frac{10}{3}$: $y=\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}=\frac{20}{15}$,
- $y=1$: $1=\frac{2}{5}\cdot x \quad /:\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{5}{2}$,
- $y=\frac{4}{5}$: $\frac{4}{5}=\frac{2}{5}\cdot x \quad /:\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}=2$,
- $y=\frac{1}{6}$: $\frac{1}{6}=\frac{2}{5}\cdot x \quad /:\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{12}$.

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{12}$
y	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{20}{15}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$

Výpočet si můžeme usnadnit úpravou předpisu: $y=\frac{2}{5}x \quad / : \frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{5}{2}y$ (z předpisu pro výpočet hodnot y z hodnot x jsme získali předpis pro výpočet hodnot x z hodnoty y).

Př. 3: Jak provádíme následující operace se zlomky? Na co musíme dát pozor?
a) sčítání b) násobení c) dělení d) odčítání

a) sčítání
Sčítáme čitatele (počty kousků) zlomků se stejným jmenovatelem (stejně velké kousky).
Hledání společného jmenovatele usnadňuje nejmenší společný násobek.

b) násobení
Násobíme čitatel s čitatelem a jmenovatel s jmenovatelem.

c) dělení
Zlomek, kterým dělíme převrátíme a tím převedeme dělení na násobení.

d) odčítání
Podobné jako sčítání, ale čitatele odečítáme.

Př. 4: Za dvě třetiny hodiny odkapou z kohoutku čtyři sedminy kýble vody. Za jak dlouho odkape z kohoutku pět šestin kýble? Příklad řeš bez kalkulačky.

$\frac{2}{3}$ hodiny ... $\frac{4}{7}$ kýble

x hodin ... $\frac{5}{6}$ kýble

$$\frac{x}{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}} \quad / \cdot \frac{5}{6}$$ (doba nutná k nakapání jednoho kýble se nemění)

$$x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2\cdot 7}{4\cdot 3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{35}{36}$$

Pět šestin kýble vody nakape za $\frac{35}{36}$ hodiny.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je velmi důležitý. Mnoho žáků se cítí v trojčlence již velmi bezpečně, opouštějí formalismus a začínají počítat výsledky přímo. Velká část v nich na předchozím příkladu ztroskotá. Což je dobrý okamžik připomenout, že podobné formalismy sice nejsou většinou úplně nejrychlejší cestou, jak něco vyřešit, ale v nejistotě poskytují vodítko, které může situaci zachránit.

Př. 5: Vyřeš rovnice.

a) $x-\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{4}x=5$ c) $\frac{x}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$

a) $x-\frac{2}{3}=\frac{1}{5} \quad /+\frac{2}{3}$

$x=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{15}+\frac{2\cdot 5}{15}$

$x=\frac{13}{15}$

b) $\frac{3}{4}x=5 \quad /:\frac{3}{4}$

$x=5:\frac{3}{4}=5\cdot\frac{4}{3}$

$x=\frac{20}{3}$

c) $\frac{x}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2}{3} \quad /+\frac{1}{4}$

$\frac{x}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{12}$

$\frac{x}{3}=\frac{11}{12} \quad /\cdot 3$

$x=\frac{11}{4}$

Př. 6: Kvalifikační závod dokončilo v limitu pět osmin závodníků, dvě devítiny závodníků dokončili závod po limitu a 22 závodníků závod vůbec nedokončilo. Kolik závodníků se závodu zúčastnilo?

Závod dokončilo: $\frac{5}{8}+\frac{2}{9}=\frac{5\cdot 9+2\cdot 8}{72}=\frac{45+16}{72}=\frac{61}{72} \Rightarrow \frac{11}{72}$ závodníků závod nedokončilo.

$\frac{11}{72}$ ... 22 závodníků

$\frac{1}{72}$ ... $22:11=2$ závodníci

$\frac{72}{72}$ ... $72\cdot 2=144$ závodníků

Závodu se zúčastnilo 144 závodníků.

Př. 7: Chodec jde rovnoměrně tak, že za dvě devítiny hodiny ujde čtyři třetiny kilometru. Najdi předpis přímé úměrnosti, která udává, jak vzdálenost, kterou ujde, závisí na době, kterou se pohybuje.

Vzdálenost, kterou ujde, závisí na době, kterou se pohybujeme $\Rightarrow$ vzdálenosti označíme y, dobu x $\Rightarrow$ dosadíme do předpisu přímé úměrnosti $y=kx$:

$\frac{4}{3}=k\cdot\frac{2}{9} \quad /:\frac{2}{9}$

$k=\frac{4}{3}:\frac{2}{9}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2}=6$

Vzdálenost, kterou urazí chodec udává přímá úměrnost $y=6x$.

Dodatek: Příklad můžeme vyřešit i pomocí kalkulačky:

$\frac{2}{9}$ hod ... $\frac{4}{3}$ km

1 hod ... x km.

Př. 8: Porovnej hodnoty poměrů (bez kalkulačky).
a) $55:99$ b) $36:60$

a) $55:99$ - hodnota poměru: $\frac{55}{99}=\frac{5}{9}=0,\overline{5}$.

b) $36:60$ - hodnota poměru: $\frac{36}{60}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0,6$

Poměr $36:60$ má větší hodnotu než poměr $55:99$.

Př. 9: Při malování Jarda míchal bílou a červenou barvu. Výsledek získal tak, že smíchal 0,8 litru červené a 2,8 litru bílé barvy. V jakém poměru barvy smíchal? Kolik červené a kolik bíle barvy je třech čtvrtinách litru směsi? Kolik litrů směsi namíchá ze dvou třetin litru červené barvy? Kolik bílé barvy bude muset k tomuto množství červené barvy přidat, aby udržel poměr?

Poměr barev: $0,8:2,8=8:28=2:7 \Rightarrow$ 9 dílů.

9 dílů ... $\frac{3}{4}$ litru.

1 díl ... $\frac{3}{4}:9=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{12}$ litru.

Červená barva - 2 díly ... $2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$ litru červené barvy.

Bílá barva - 7 dílů ... $7\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$ litru bílé barvy.

Červená barva - $\frac{2}{3}$ litru ... 2 díly $\Rightarrow$ 1 díl ... $\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$ litru.

Bílá barva - 5 dílů ... $5\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ litry.

Směs: $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$ litru.

Jarda smíchal barvy v poměru $2:7$.

Ve třech čtvrtinách litru barvy je šestina litru červené barvy a $\frac{7}{12}$ litru bílé barvy.

Ze dvou třetin litru červené barvy připravíme $\frac{7}{3}$ litru směsi, do které musíme přidat $\frac{5}{3}$ litr bílé barvy.

Př. 10: Závěrečnou práci odevzdaly v čas tři čtvrtiny maturantů. Z těchto prací bylo uznáno za vyhovující šest sedmin. Celkem 20 studentů tak nevyhovělo požadavkům v termínu. Kolik má škola maturantů?

Požadavkům vyhověli studenti, kteří práci odevzdali a práce byla uznána za vyhovující $\Rightarrow$ šest sedmin ze tří čtvrtin: $\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{14}$ studentů.

Zbývající studenti nevyhověli $\Rightarrow$ nevyhovělo $\frac{5}{14}$ studentů ... 20 studentů.

$\frac{1}{14}$ studentů ... $20:5=4$ studentů.

$\frac{14}{14}$ studentů ... $14\cdot 4=48$ studentů.

Škola má 48 maturantů.

Shrnutí: Výskyt zlomků v zadání příkladů na přímou úměrnost nijak nemění postupy, kterými příklady řešíme (zlomky jsou také čísla).