

2.5.17 Dvojitá trojčlenka

Předpoklady: 020515

Př. 1: Čerpadlo o výkonu 1,5 kW vyčerpá ze sklepa vodu za 3 hodiny. Za jak dlouho by vodu ze sklepa vyčerpalo čerpadlo o výkonu 2,2 kW?

Čím výkonnější čerpadlo, tím rychleji čerpá vodu a tím kratší čas bude potřeba k jejímu vyčerpání \Rightarrow nejde o přímou úměrnost \Rightarrow nemůžeme počítat klasickou trojčlenkou.

1,5 kWh	...	3 hodiny
2,2 kWh	...	x hodin

Množství vyčerpané vody zůstává stejné: $1,5 \cdot 3 = 2,2 \cdot x \quad /: 2,2$

$$x = \frac{1,5 \cdot 3}{2,2} = 2,05 \text{ hodiny}$$

Výkonnější čerpadlo by vodu vyčerpalo za 2,05 hodiny.

Pedagogická poznámka: Stačí, když žáci poznají, že nejde o přímo úměrnost nemohou tedy příklad počítat běžným postupem. Tato skutečnost by jim měla dojít nejpozději ve chvíli, kdy dojdou k výsledku 4,4 hodiny. Správný výsledek po žácích zatím nechci, kdo ho najde, zaslouží samozřejmě pochvalu. Řešení si ukážeme, ale ještě z něj neděláme standardní postup.

Př. 2: Jirka ujde za čtyři devítiny hodiny vzdálenost pět třetin km. Za jak dlouho ujde sedm čtvrtin km?

Čím déle Jirka jde, tím větší vzdálenost ujde \Rightarrow přímá úměrnost.

$\frac{4}{9}$ hod	...	$\frac{5}{3}$ km
x hod	...	$\frac{7}{4}$ km

$$\frac{x}{\frac{7}{4}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}} \quad / \cdot \frac{7}{4} \quad (\text{počet km za 1 hodinu se nemění})$$

$$x = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{15}$$

Jirka ujde sedm čtvrtin km za sedm patnáctin hodiny.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je první dvojitou trojčlenkou. Nechávám žákům čas na pokus o samostatné řešení (většina úspěšných pokusů je postavená na výpočtu ceny za 1 litr obsahu, občas někdo sestaví i výraz podobný okamžitému řešení, které ještě budeme probírat.), pak příklad řeším na tabuli. Vysvětlím, že jde o dvě trojčlenky, které můžeme řešit zvlášť. Napíšu první trojčlenku a nechám třídu ji vyřešit, pak jim dám šanci pokusit se o sestavení druhé trojčlenky.

Při řešení všech příkladů zdůrazňuji, že dvojitá trojčlenka je dobrým příkladem jednoho z nejpoužívanějších matematických postupů (převedení těžkého problému na více problémů jednodušších). Nejčastějším problémem je použití původních hodnot v druhé trojčence místo hodnot vypočtených v první trojčence.

Pedagogická poznámka: Část žáků řeší dvojitě trojčlenky přímým sestavením výrazu pro výsledek (více v hodině 020522). Tento způsob řešení nepotlačuji, ale trvám na tom, že následující příklady musejí spočítat také pomocí dvojitě trojčlenky.

Př. 3: 15 lahví o objemu 0,7 litru stálo 3520 Kč. Kolik by stálo 9 lahví o objemu 1,5 litru?

Dvojitá trojčlenka (dvě závislosti najednou - cena závisí na počtu lahví i jejich objemu).

15 lahví	...	0,7 litru	...	3520 Kč
9 lahví	...	1,5 litru	...	x Kč

Neumíme řešit obě závislosti najednou \Rightarrow rozdělíme příklad na dvě části.

15 lahví	...	0,7 litru	...	3520 Kč
9 lahví	...	0,7 litru	...	y Kč

Přímá úměra: čím více lahví, tím více zaplatíme.

$$\frac{y}{9} = \frac{3520}{15} \quad / \cdot 9 \quad (\text{cena jedné lahve se nemění})$$

$$y = \frac{3520}{15} \cdot 9 = 2112 \text{ Kč}$$

Výsledek můžeme použít k provedení druhého kroku a dopočtení příkladu.

9 lahví	...	0,7 litru	...	2112 Kč
9 lahví	...	1,5 litru	...	x Kč

Přímá úměra: čím větší objem, tím větší cena.

$$\frac{x}{1,5} = \frac{2112}{0,7} \quad / \cdot 1,5$$

$$x = \frac{2112}{0,7} \cdot 1,5 \doteq 4525,7 \text{ Kč}$$

9 lahví o objemu 1,5 litru by stálo 4525,70 Kč.

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem je dosazení do druhé trojčlenky, kdy žáci nepoužívají hodnotu vypočtenou v první trojčence, ale údaj ze zadání.

Př. 4: 5 čerpadel vyčerpá za 3 hodiny 40 m^3 vody. Kolik vody vyčerpají za 7 hodin 4 čerpadla?

Dvojitá trojčlenka (dvě závislosti najednou - množství vody závisí na počtu čerpadel i jejich výkonu).

5 čerpadel	...	3 hodiny	...	40 m^3
4 čerpadla	...	7 hodin	...	$x \text{ m}^3$

Neumíme řešit obě závislosti najednou \Rightarrow rozdělíme příklad na dvě části.

5 čerpadel	...	3 hodiny	...	40 m^3
4 čerpadla	...	3 hodiny	...	$y \text{ m}^3$

Přímá úměra: čím více čerpadel, tím více přečerpané vody.

$$\frac{y}{4} = \frac{40}{5} \quad / \cdot 4 \quad (\text{množství vody přečerpané jedním čerpadlem se nemění})$$

$$y = \frac{40}{5} \cdot 4 = 32 \text{ m}^3$$

Výsledek můžeme použít k provedení druhého kroku a dopočtení příkladu.

4 čerpadla ... 3 hodiny ... 32 m³

4 čerpadla ... 7 hodin ... x m³

Přímá úměra: čím více hodin, tím více přečerpané vody.

$$\frac{x}{7} = \frac{32}{3} \quad / \cdot 7$$

$$x = \frac{32}{3} \cdot 7 = 74, \bar{6} \text{ m}^3$$

Čtyři čerpadla by za 7 hodin vyčerpala 74, $\bar{6}$ m³.

Pedagogická poznámka: Určitě se objeví hlasy, že předchozí příklad není přímá úměrnost, protože je o čerpadlech stejně jako první příklad. Říkám žákům na rovinu, že přesně z tohoto důvodu jsem oba příklady do hodiny zařadil. Skutečnost, že se v obou zadáních vyskytuje slovo čerpadlo v žádném případě neznamená, že jde o stejnou děj. Není možné dopředu stanovit, které příklady jsou a které nejsou přímá úměrnost, podle výskytu nějakých slov. Jedinou možností je u každého příkladu se zamyslet, zda popisuje přímou úměrnost nebo ne.

Př. 5: Svícení patnácti žárovkami o výkonu 60 W stálo dohromady 1800 Kč za rok. Kolik by stálo svícení 20 LED žárovkami o výkonu 5 W?

Dvojitá trojčlenka - dvě závislosti najednou - množství spotřebované energie (a tedy i platba) závisí na počtu a výkonu žárovek.

15 žárovek ... 60 W ... 1800 Kč

20 žárovek ... 5 W ... x Kč

Neumíme řešit obě závislosti najednou \Rightarrow rozdělíme příklad na dvě části.

15 žárovek ... 60 W ... 1800 Kč

15 žárovek ... 5 W ... y Kč

Přímá úměra: čím větší výkon, tím větší spotřeba a tím větší platba za energii.

$$\frac{y}{5} = \frac{1800}{60} \quad / \cdot 5 \quad (\text{cena za instalovaný watt se nemění})$$

$$y = \frac{1800}{60} \cdot 5 = 150 \text{ Kč}$$

Výsledek můžeme použít k provedení druhého kroku a dopočtení příkladu.

15 žárovek ... 5 W ... 150 Kč

20 žárovek ... 5 W ... x Kč

Přímá úměra: čím více žárovek, tím větší spotřeba.

$$\frac{x}{20} = \frac{150}{15} \quad / \cdot 20$$

$$x = \frac{150}{15} \cdot 20 = 200 \text{ Kč}$$

Svícení 20 LED žárovkami o výkonu 5 W by stálo 200 Kč ročně.

Př. 6: 15 automobilů o nosnosti 7 tun přepraví za pět dní 5000 tun zeminy. Kolik tun zeminy přepraví za sedm dní 19 automobilů o nosnosti 10 t?

Trojité trojčlenka - tři závislosti najednou - množství přepravené zeminy závisí na počtu, výkonu aut i na počtu dní.

15 automobilů	...	7 t	...	5 dní	...	5000 t
19 automobilů	...	10 t	...	7 dní	...	x t

Rozdělíme příklad na tři části.

15 automobilů	...	7 t	...	5 dní	...	5000 t
19 automobilů	...	7 t	...	5 dní	...	y t

Přímá úměra: čím více automobilů, tím více převezené zeminy.

$$\frac{y}{19} = \frac{5000}{15} \quad / \cdot 19 \quad (\text{množství zeminy převezené jedním autem se nemění})$$

$$y = \frac{5000}{15} \cdot 19 \doteq 6333 \text{ t}$$

Výsledek použijeme k provedení druhého kroku.

19 automobilů	...	7 t	...	5 dní	...	6333 t
19 automobilů	...	10 t	...	5 dní	...	z t

Přímá úměra: čím větší nosnost automobilů, tím více převezené zeminy.

$$\frac{x}{10} = \frac{6333}{7} \quad / \cdot 10 \quad (\text{množství zeminy připadající na 1 tunu nosností se nemění})$$

$$x = \frac{6333}{7} \cdot 10 \doteq 9048 \text{ tun}$$

Výsledek použijeme k provedení třetího kroku.

19 automobilů	...	10 t	...	5 dní	...	9048 t
19 automobilů	...	10 t	...	7 dní	...	x t

Přímá úměra: čím více dnů, tím více převezené zeminy.

$$\frac{x}{7} = \frac{9048}{5} \quad / \cdot 7 \quad (\text{množství zeminy převezené za jeden den se nemění})$$

$$x = \frac{6333}{5} \cdot 7 \doteq 12700 \text{ tun}$$

19 automobilů o nosnosti 10 přepraví za 7 dní 12670 tun zeminy.

Př. 7: Za sedm pětimetrových hranolů 10 x 10 na strop zaplatil Jarda 5500 Kč. Kolik by zaplatil za pět sedmimetrových hranolů 12 x 12 cm? Cena dřeva za m^3 je stejná.

Zadání obsahuje příliš mnoho údajů \Rightarrow musíme si ujasnit jejich význam.

Cena za trámy závisí na:

- počtu trámů,

- objemu trámů.

Objem původního trámu: $V = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 5 = 0,05 \text{ m}^3$.

Objem nového trámu: $V = 0,12 \cdot 0,12 \cdot 7 = 0,1008 \text{ m}^3$.

7 hranolů ... 0,05 m³ ... 5500 Kč

5 hranolů ... 0,1008 m³ ... x Kč

Neumíme řešit obě závislosti najednou \Rightarrow rozdělíme příklad na dvě části.

7 hranolů ... 0,05 m³ ... 5500 Kč

7 hranolů ... 0,1008 m³ ... y Kč

Přímá úměra: čím větší trám, tím vyšší cena.

$$\frac{y}{0,1008} = \frac{5500}{0,05} \quad / \cdot 0,1008 \quad (\text{cena za instalovaný watt se nemění})$$

$$y = \frac{5500}{0,05} \cdot 0,1008 = 11088 \text{ Kč}$$

Výsledek můžeme použít k provedení druhého kroku a dopočtení příkladu.

7 hranolů ... 0,1008 m³ ... 11088 Kč

5 hranolů ... 0,1008 m³ ... x Kč

Přímá úměra: čím více trámů, tím vyšší cena.

$$\frac{x}{5} = \frac{11088}{7} \quad / \cdot 5$$

$$x = \frac{11088}{7} \cdot 5 = 7920 \text{ Kč}$$

Za pět sedmimetrových hranolů 12 x 12 cm zaplatí Jarda 7920 Kč.

Pedagogická poznámka: Přirozenějším způsobem výpočtu (který bych sám použil) je vypočítat objemy dřeva v obou případech a příklad vypočítat přes jednotkovou cenu.

Shrnutí: Složitý příklad se dvěma závislostmi můžeme rozdělit na dva jednoduché.