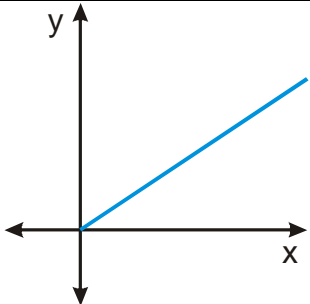
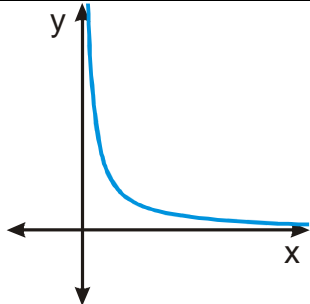


2.5.21 Nepřímá úměrnost III

Předpoklady: 020520

Př. 1: Porovnej do dvou sloupců přímou a nepřímou úměrnost (předpis, základní vlastnost, postup při řešení příkladů, ...).

	Přímá úměrnost	Nepřímá úměrnost
předpis	$y = k \cdot x$	$y = \frac{k}{x}$
vlastnost	„čím více, tím více“	„čím více, tím méně“
postup	zachovává se poměr veličin $\frac{y}{x}, \left(\frac{x}{y}\right)$	zachovává se součin obou veličin $y \cdot x$
graf		

Př. 2: Při vytrvalostním běhu uběhl Šimon za celý limit rychlostí 13 km/h 3,5 km. Jak by změnila vzdálenost, kterou uběhl, kdyby běžel rychlostí o 2 km/h větší?

Čím větší rychlost, tím větší uběhnutá vzdálenost \Rightarrow přímá úměrnost.

13 km/h ... 3,5 km
15 km/h ... x km

$$\frac{3,5}{13} = \frac{x}{15} \quad / \cdot 15 \quad (\text{časový limit se nemění})$$

$$x = \frac{3,5}{13} \cdot 15 \doteq 4,04 \text{ km}$$

Kdyby Šimon běžel o 2 km/h rychleji, uběhl by v limitu 4,04 km.

Př. 3: U pobřeží se při stavbě nového přístavu navážejí dva stejně objemné umělé ostrovy. První ostrov naváželo 25 nákladních automobilů 31 dní. Kolik nákladních automobilů je potřeba nasadit, aby se navážení druhého ostrova stihlo do 20 dnů?

Čím více automobilů, tím rychleji ostrov navezou \Rightarrow nepřímá úměrnost.

25 automobilů	...	31 dnů
x automobilů	...	20 dní

$$x \cdot 20 = 25 \cdot 31 \quad / : 20 \quad (\text{množství navezeného materiálu se nemění})$$

$$x = \frac{25 \cdot 31}{20} = 38,75 \doteq 39 \text{ automobilů}$$

K navážení ostrova je třeba použít 39 automobilů.

Pedagogická poznámka: Nevyžadují v písemkách, aby žáci uměli sestavovat vztahy úvahou, naopak se snažím zdůrazňovat, že klasický postup je jistotou, kterou by měli v každém případě ovládat. Na druhou stranu chci, aby se o sestavení vztahů úvahou pokoušeli v hodinách, protože to rozvíjí schopnost interpretovat zadání a rozvíjí funkční myšlení.

Předchozí příklad nemusíme řešit pouze pomocí trojčlenky. Vztah pro výsledek můžeme i přímo odhadnout ze zadání.

První ostrov naváželo 25 nákladních automobilů 31 dní. Kolik nákladních automobilů je potřeba nasadit, aby se navážení druhého ostrova stihlo do 20 dnů?

Postupně si projdeme jednotlivé údaje ze zadání a představíme si, jak ovlivňují děj, který v příkladu řešíme. Podle toho, zda zvětšují nebo zmenšují konečnou hodnotu je budeme psát do čitatele nebo jmenovatele zlomku, ze kterého hodnotu určíme:

- 25 automobilů naváželo první ostrov, čím více automobilů původní ostrov naváželo, tím větší ostrov je a tím více automobilů budeme potřebovat pro navezení druhého ostrova $\Rightarrow x = \frac{25 \cdot 31}{20}$,
- 31 dní trvalo původní navážení, čím víc dní trvalo navážení prvního ostrova, tím větší ostrov je a déle bude trvat navezení druhého ostrova $\Rightarrow x = \frac{25 \cdot 31}{20}$,
- 20 dní má trvat navezení druhého ostrova, čím víc dnů má navezení druhého ostrova trvat tím, menší počet automobilů budeme potřebovat $\Rightarrow x = \frac{25 \cdot 31}{20}$.

Získali jsme správný vztah pouhou úvahou.

Následující příklady vždy zkusíme vyřešit nejdříve úvahou a pak teprve klasickým způsobem (pro kontrolu).

Př. 4: Petr jezdí do práce. Tím, že místo na kole začal jezdit autem, zvýšila se jeho průměrná rychlost z 15 km/h na 45 km/h. Jak dlouho jezdil dříve do práce, když nyní mu cesta trvá 12 minut?

Počítáme původní dobu jízdy.

- 15 km/h původní rychlost, čím větší je původní rychlost, tím menší bude původní doba jízdy $\Rightarrow x = \frac{\quad}{15}$,
- 45 km/h je nová rychlost, čím větší je nová rychlost, tím větší je vzdálenost, kterou Petr jezdí a tím delší musela být původní cesta $\Rightarrow x = \frac{45}{15}$,
- 12 minut je nová doba cesty, čím větší je nová doba cesty, tím větší je vzdálenost, kterou Petr jezdí a tím delší musela být původní cesta $\Rightarrow x = \frac{45 \cdot 12}{15} = 36$ minut.

Kontrola klasicky.

Čím větší rychlostí jezdí, tím kratší je čas dojíždění \Rightarrow nepřímá úměrnost.

45 km/h	...	12 minut
15 km/h	...	x minut

$$45 \cdot 12 = 15 \cdot x \quad / : 15 \quad (\text{ujetá vzdálenost se nemění})$$

$$x = \frac{45 \cdot 12}{15} = 36 \text{ minut}$$

Petr jezdil do práce na kole 36 minut.

Př. 5: 800 g brambor je nutné vařit do změknutí 20 minut. Jak dlouho je třeba vařit 2,5 kg brambor?

Nejde o přímou ani nepřímou úměrnost. Doba varu brambor nezávisí na jejich množství. Na množství závisí pouze doba nutná k ohřátí na bod varu.

Př. 6: Množství odvezené zeminy denně ze stavby dálnice se změnilo na 920 m³ poté, co se počet nákladních automobilů, které zeminu odvázejí, zmenšil z 15 na 11. Kolik m³ zeminy auta odvážela původně?

Počítáme původní množství zeminy.

- 920 m³ je nové množství odvážené zeminy, čím větší je množství zeminy, tím víc dokáže odvézt jedno auto a tím větší bylo i původní množství odvážené zeminy $\Rightarrow x = \frac{920}{\quad}$,
- 11 automobilů odveze 920 m³ zeminy, čím více auto odveze dané množství zeminy, tím méně odveze jedno auto, a tím méně odvezlo zeminy původní množství aut $\Rightarrow x = \frac{920}{11}$,
- 15 automobilů odváželo zeminu, čím více automobilů zeminu odváží, tím více ji odveze $\Rightarrow x = \frac{920}{11} \cdot 15 \doteq 1255 \text{ m}^3$.

Kontrola klasicky.

Čím více aut zeminu odváží, tím více se jí za den odveze \Rightarrow přímá úměrnost.

11 aut	...	920 m ³
15 aut	...	x

$$\frac{x}{15} = \frac{920}{11} \quad / \cdot 15 \quad (\text{množství odvezené jedním autem za den se nemění})$$

$$x = \frac{920}{11} \cdot 15 \doteq 1255 \text{ m}^3$$

Původně auta odvážela ze stavby denně 1255 m^3 zeminy denně.

Př. 7: Objem závaží z oceli o hustotě 7800 kg/m^3 je přibližně $0,13$ litru. Jaký objem by mělo stejně těžké závaží z hliníku o hustotě 2700 kg/m^3 .

- 7800 kg/m^3 je hustota závaží z oceli \Rightarrow čím větší je hustota závaží, tím větší je jeho hmotnost a tím více budeme na stejně těžké závaží potřebovat jakékoliv jiné látky \Rightarrow

$$x = \frac{7800}{2700},$$
- $0,13$ litru je objem závaží z oceli \Rightarrow čím větší je objem závaží, tím větší je jeho hmotnost a tím více budeme na stejně těžké závaží potřebovat jakékoliv jiné látky \Rightarrow

$$x = \frac{7800 \cdot 0,13}{2700},$$
- 2700 kg/m^3 je hustota hliníku \Rightarrow čím větší je hustota látky, ze které děláme závaží o dané hmotnosti, tím menší objem této látky budeme potřebovat \Rightarrow

$$x = \frac{7800 \cdot 0,13}{2700} \doteq 0,38 \text{ litru.}$$

Kontrola klasicky.

Čím větší hustota látky, tím menší objem na $1 \text{ kg} \Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

7800 kg/m^3	...	$0,13$ litru
2700 kg/m^3	...	x

$$x \cdot 2700 = 7800 \cdot 0,13 \quad / : 2700 \quad (\text{hmotnost závaží je stejná – 1 kilogram})$$

$$x = \frac{7800 \cdot 0,13}{2700} \doteq 0,38 \text{ litru}$$

Kilogramové závaží z hliníku by mělo objem přibližně $0,38$ litru.

Př. 8: Jeden tým pro kontrolu v současnosti zkontroluje za směnu 120 balení produktů. Od příštího týdne se má počet kontrolorů v týmu zvýšit z devíti na čtrnáct a počet výrobku v jednom balení má stoupnout z 50 na 70 . Kolik balení bude schopen zkontrolovat tým za směnu?

Úvaha:

- 120 balení: čím víc balení zkontroluje tým nyní, tím jednodušší je kontrola a tím více balení zkontroluje i po změně $\Rightarrow x = \frac{120}{70},$

- 9 kontrolorů původně: čím větší je původní počet kontrolorů, tím náročnější je kontrola a tím méně balení zkontrolují kontroloři po změně $\Rightarrow x = \frac{120}{9}$,
- 14 kontrolorů po změně: čím více bude po změně kontrolorů, tím více balení zkontrolují $\Rightarrow x = \frac{120 \cdot 14}{9}$,
- 50 výrobků v jednom balení původně: čím více bylo výrobků v původním balení, tím byla kontrola jednoho výrobků jednodušší a tím více výrobků (a tedy i balení) dokáží kontroloři zkontrolovat i po změně $\Rightarrow x = \frac{120 \cdot 14 \cdot 50}{9}$,
- 70 výrobků v jednom balení po změně: čím více výrobků bude v jednom balení, tím déle bude kontrola jednoho balení trvat a tím méně balení se kontrolorům podaří zkontrolovat za směnu $\Rightarrow x = \frac{120 \cdot 14 \cdot 50}{9 \cdot 70} \doteq 133$ balení.

Kontrola.

9 kontrolorů	...	50 výrobků	...	120 balení
14 kontrolorů	...	70 výrobků	...	x balení

Zachováme počet kontrolorů.

9 kontrolorů	...	50 výrobků	...	120 balení
9 kontrolorů	...	70 výrobků	...	y balení

Čím více výrobků v balení, tím méně balení zkontrolují \Rightarrow nepřímá úměrnost.

$$50 \cdot 120 = 70 \cdot y \quad / : 70 \text{ (počet zkontrolovaných výrobků se nemění)}$$

$$y = \frac{50 \cdot 120}{70} \doteq 86 \text{ balení}$$

9 kontrolorů	...	70 výrobků	...	86 balení
14 kontrolorů	...	70 výrobků	...	x balení

Čím více kontrolorů, tím více balení zkontrolují \Rightarrow přímá úměrnost.

$$\frac{x}{14} = \frac{86}{9} \quad / \cdot 14 \text{ (jeden kontrolor zkontroluje vždy stejný počet balení)}$$

$$x = \frac{86}{9} \cdot 14 \doteq 134 \text{ balení.}$$

Po plánovaných změnách zkontroluje jeden tým za jednu směnu přibližně 133 balení výrobků.

Dodatek: Malý rozdíl ve výsledcích je způsoben zaokrouhlením v první trojčlence. Pokud do druhé trojčlenky dosadíme místo hodnoty 86 výraz $\frac{50 \cdot 120}{70}$, získáme stejný vztah

$$\text{pro } x \text{ a tedy i stejný výsledek: } x = \frac{50 \cdot 120}{9} \cdot 14 = \frac{50 \cdot 120 \cdot 14}{70 \cdot 9} \doteq 133.$$

Pedagogická poznámka: Rozdíl ve výsledcích je samozřejmě nutné rozebrat. Žáci by sami měli přijít nejen s tím, že jde o důsledek zaokrouhlování, ale měly by navrhnout i nějaké metody, jak to ověřit (mimo dosazení v dodatku, je možné zapsat výsledek první trojčlenky s větší přesností).

Př. 9: Kopání příkopu trvalo celkem čtyř dny. Jak dlouho by trvalo, kdyby místo pěti dělníků kopal příkop sedm dělníků osm hodin denně místo původních šesti?

Úvaha:

- 4 dny původně: čím déle trvalo kopání příkopu, tím větší práci kopání představuje a tím déle bude trvat i v jiných situacích $\Rightarrow x = \frac{4}{\dots}$,
- 5 dělníků původně: čím více dělníků kopal příkop, tím větší práci kopání představuje a tím déle bude trvat i v jiných situacích $\Rightarrow x = \frac{4 \cdot 5}{\dots}$,
- 7 dělníků nově: čím více dělníků bude kopat příkop, tím rychleji práci udělají $\Rightarrow x = \frac{4 \cdot 5}{7}$,
- 8 hodin nově: čím více hodin budou dělníci pracovat, tím rychleji práci udělají $\Rightarrow x = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8}$,
- 6 hodin původně: čím více hodin původně dělníci pracovali, tím větší práci výkop představuje a tím déle bude se bude výkop kopat nově $\Rightarrow x = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{7 \cdot 8} \doteq 2,1$ dne,

Za změněných podmínek by kopání příkopu trvalo 2,1 dne.

Kontrola.

5 dělníků	..	6 hodin	...	4 dny
7 dělníků	...	8 hodin	...	x dnů

Zachováme počet dělníků.

5 dělníků	..	6 hodin	...	4 dny
5 dělníků	...	8 hodin	...	y dnů

Čím větší bude počet hodin odpracovaných každý den, tím menší počet dnů bude práce trvat \Rightarrow nepřímá úměrnost.

$$6 \cdot 4 = 8 \cdot y \quad / : 8 \quad (\text{celkový počet hodin na odpracování se nemění})$$

$$y = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3 \text{ dny}$$

5 dělníků	..	8 hodin	...	3 dny
7 dělníků	...	8 hodin	...	x dnů

Čím větší počet dělníků, tím rychleji bude práce hotová \Rightarrow nepřímá úměrnost.

$$5 \cdot 3 = 7 \cdot x \quad / : 7 \quad (\text{počet člověkodní k odpracování se nemění})$$

$$x = \frac{5 \cdot 3}{7} \doteq 2,1 \text{ dne}$$

Sedm dělníků vykope při osmihodinové pracovní době příkop za 2,1 dne.

Př. 10: Příprava olympiády vrcholí. Počet dlaždičů se zvýšil z 36 na 81 a jejich pracovní doba se prodloužila z 8 hodin na 10. Za den tak stihnou vydláždit 1300 m² plochy. Jaká plocha byla dlážděna každý den před změnami?

Úvaha:

- 36 dlaždičů původně: čím víc dlaždičů původně dláždilo, tím větší plochu denně vydláždili $\Rightarrow x = \frac{36}{81}$,
- 81 dlaždičů nově: čím více dlaždičů je nyní potřeba na dláždění 1300 m^2 plochy, tím je dláždění náročnější a tím méně plochy dláždil původně počet dlaždičů $\Rightarrow x = \frac{36}{81}$,
- 8 hodin původní doba: čím byla původní pracovní doba delší, tím větší plochu stihli dlaždiči za den vydláždít $\Rightarrow x = \frac{36 \cdot 8}{81}$,
- 10 hodin nová doba: čím větší počet dlaždičů je dnes potřeba na dláždění 1300 m^2 plochy, tím je dláždění náročnější a tím menší plochu dláždili dlaždiči denně před tím $\Rightarrow x = \frac{36 \cdot 8}{81 \cdot 10}$,
- 1300 m^2 nově dlážděno: čím větší plochu vydláždí dlaždiči nyní, tím je dláždění jednodušší a tím větší plochu dláždili dlaždiči původně $\Rightarrow x = \frac{36 \cdot 8 \cdot 1300}{81 \cdot 10} \doteq 462 \text{ m}^2$.

Kontrola.

81 dlaždičů	..	10 hodin	...	1300 m^2
36 dlaždičů	...	8 hodin	...	x

Zachováme počet hodin.

81 dlaždičů	..	10 hodin	...	1300 m^2
36 dlaždičů	..	10 hodin	...	y

Čím více dlaždičů, tím větší plochu vydláždí \Rightarrow přímá úměrnost.

$$\frac{1300}{81} = \frac{y}{36} \quad / \cdot 36 \quad (\text{plocha vydlážděná jedním dlaždičem se nemění})$$

$$y = \frac{1300}{81} \cdot 36 \doteq 578 \text{ m}^2$$

36 dlaždičů	..	10 hodin	...	578 m^2
36 dlaždičů	...	8 hodin	...	x

Čím více hodin dlaždiči pracují, tím větší plochu vydláždí \Rightarrow přímá úměrnost.

$$\frac{x}{8} = \frac{578}{10} \quad / \cdot 8 \quad (\text{počet } \text{m}^2 \text{ vydlážděných za 1 hodinu se nemění})$$

$$x = \frac{578}{10} \cdot 8 = 462 \text{ m}^2$$

Před změnami bylo dlážděno 462 m^2 dlažby.

Shrnutí: Vztah pro výpočet veličiny z úměrnosti (i složené) můžeme sestavit úvahou.