

2.5.22 Odhady úměrností

Předpoklady: 020520

Pedagogická poznámka: V hodině nejdříve nechám žáky zapsat do sešitu odhady (cca 5 minut – jeden odhad za minuty), pak si je kontrolujeme. Hodnotíme 2 body pokud je chyba odhadu menší než cca 15 %, 1 jedním bodem při chybě menší než 50 %, nula bodů, pokud byla v odhadu větší chyba, ale žák správně rozlišil přímou a nepřímou úměrnost (zda má zvětšovat nebo zmenšovat), -1 bod těm, kteří špatně rozpoznali druh úměry. Žáci, kteří překročí hranici 8 bodů dostanou dva plusy, žáci přes 5 bodů jeden.

V následujících příkladech nejdříve odhadni výsledky (co nejpřesněji). Teprve po kontrole odhadů příklady spočítej.

Př. 1: Součástka vyrobená z oceli o hustotě 7800 kg/m^3 váží 120 g. Kolik by vážila, kdyby byla vyrobena z duralu o hustotě 2800 kg/m^3 ?

Čím větší hustota látky, tím větší hmotnost \Rightarrow přímá úměrnost.

Odhad

Hustota duralu je méně než 3 krát menší \Rightarrow hmotnost součástky bude také méně než 3 krát menší \Rightarrow o něco více než 40 g \Rightarrow odhad 44 gramů.

Výpočet

$$\begin{array}{l} 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \quad \dots \quad 120 \text{ g} \\ 2800 \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \quad \dots \quad x \text{ g} \\ \frac{120}{7800} = \frac{x}{2800} \quad / \cdot 2800 \quad (\text{objem součástky se nemění}) \\ x = \frac{120}{7800} \cdot 2800 \doteq 43 \text{ g} \end{array}$$

Součástka z duralu by vážila 43 g.

Př. 2: Pokud jsou zapnuty dvě třetiny strojů, vyrobí sadu součástek za dvě pětiny hodiny. Jakou část strojů musíme zapnout, aby výroba sady trvala dvě třetiny hodiny?

Čím větší počet strojů zapneme, tím menší dobu bude výroba trvat \Rightarrow nepřímá úměrnost.

Odhad

Doba se má přibližně dvakrát prodloužit, proto se množství strojů musí přibližně dvakrát zmenšit. Hodnoty zlomků si odpovídají \Rightarrow musíme zapnout dvě pětiny strojů.

Výpočet

$$\frac{2}{3} \text{ strojů} \quad \dots \quad \frac{2}{5} \text{ hodiny}$$

x strojů ... $\frac{2}{3}$ hodiny

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = x \cdot \frac{2}{3} \quad / \cdot \frac{2}{3} \quad (\text{počet vyrobených součástek se nemění})$$

$$x = \frac{2}{5}$$

Pokud má výroba trvat dvě třetiny hodiny, musíme zapnout dvě pětiny strojů.

Př. 3: Tři vejčička se uvaří na hniličko za 3,5 minuty. Za jak dlouho se uvaří na hniličko pět vajec?

Doba vaření vajčiček nezávisí na jejich počtu, každé vajčičko se vaří stejně dlouho \Rightarrow nejde ani o přímou ani nepřímou úměrnost.

Pět vajec se na hniličko uvaří za 3,5 minuty.

Př. 4: Za peníze, které mu zbyly v peněžence, koupil Jarmil 1,5 kg cibule po 12,90 Kč. Kolik cibule by mohl koupit, kdyby stála 9,90 Kč?

Čím vyšší je cena cibule, tím menší množství si Jarmil může nakoupit \Rightarrow nepřímá úměrnost.

Odhad

Cena se snížila o necelou třetinu \Rightarrow množství se o necelou třetinu zvýší \Rightarrow Jarmil by nakoupil 1,9 kg cibule.

Výpočet

1,5 kg ... 12,90 Kč
 x kg ... 9,90 Kč

$$1,5 \cdot 12,9 = x \cdot 9,9 \quad / : 9,9 \quad (\text{Jarmil má k dispozici pořád stejné množství peněz})$$

$$x = \frac{1,5 \cdot 12,9}{9,9} = 1,95 \text{ kg}$$

Kdyby cibule stála 9,90 Kč, mohl by jí Jarmil nakoupit 1,95 kg.

Př. 5: Lucka nechala na puštěné plotýnce hrnec s tři čtvrtě litrem polívky, která se stále vaří. Za půl hodiny se vyvařilo 0,15 litru vody. Za jak dlouho by se vyvařila všechna polívka?

Čím déle je plotýnka puštěná, tím více vody se vyvaří \Rightarrow přímá úměrnost.

Odhad

Celkový objem polívky je pětkrát větší než objem vyvařené vody \Rightarrow čas by se měl zvětšit pětkrát \Rightarrow všechna voda se vyvaří za 2,5 hodiny.

Výpočet

0,15 litru ... 0,5 hodiny
0,75 litru ... x hodin

$$\frac{0,5}{0,15} = \frac{x}{0,75} \quad / \cdot 0,75 \quad (\text{doba k vyvaření litru vody se nemění})$$

$$x = \frac{0,5}{0,15} \cdot 0,75 = 2,5$$

Všechna polévka by se vyvařila za 2,5 hodiny.

Př. 6: Kolikrát se zvětší produkce závodu, pokud se množství strojů zvětší třikrát a místo jedné směny se bude pracovat na dvě směny?

Doba výroby se přechodem z jednosměnného provozu na dvousměnný zvětší dvakrát.

- Čím delší pracovní doba, tím větší počet výrobků.
- Čím větší počet strojů, tím větší počet výrobků.

Obě úměry jsou přímé \Rightarrow počet výrobků se zvětší dvakrát (kvůli času) a třikrát (kvůli počtu strojů) \Rightarrow počet výrobků se zvětší $2 \cdot 3 = 6$ krát.

Př. 7: Objem zakázek se zvětšil pětkrát, počet pracovníků dvakrát. Kolikrát se zvětší doba nutná k jejich dokončení?

- Čím větší objem zakázek, tím delší doba nutná k jejich dokončení.
- Čím větší počet pracovníků, tím kratší doba nutná k dokončení zakázek.

První úměra je přímá, druhá je nepřímá \Rightarrow doba nutná k dokončení zakázek se zvětší pětkrát (kvůli objemu) a zmenší dvakrát (kvůli pracovníkům) \Rightarrow doba k dokončení zakázek se zvětší

$$\frac{5}{2} = 2,5 \text{ krát.}$$

Př. 8: Počet pracovníků se zvětšil 2,3 krát a jejich pracovní doba se prodloužila 1,2 krát. Kolikrát se zkrátí doba dokončení zakázky?

- Čím větší počet pracovníků, tím kratší doba nutná k dokončení zakázek.
- Čím delší pracovní doba, tím kratší doba nutná k dokončení zakázek.

Obě úměry jsou nepřímá, doba dokončení zakázky se zkrátí 2,3 krát (kvůli pracovníkům) a 1,2 krát (kvůli pracovní době) \Rightarrow doba dokončení zakázky se zkrátí $2,3 \cdot 1,2 = 2,76$ krát.

Pro následující příklady nejdříve odhadni výsledek, pak sestav výraz pro určení neznámé, vypočti její hodnotu a teprve poté řeš příklady klasicky pomocí dvojité trojčlenky.

Př. 9: Při poslední povodni čerpala vodu ze školního sklepa dvě čerpadla o výkonu 1,2 kW celkem osm hodin. Letos je sklep opět plný, ale hasiči mají místo dvou starých čtyři nová čerpadla o výkonu 1,5 kW. Jak dlouho bude čerpání trvat?

Odhad

Dvojnásobný počet čerpadel zkrátí dobu čerpání na polovinu, čerpadla mají o pětinu větší výkon, který zkrátí čerpání v poměru 4:5 \Rightarrow čerpání bude trvat o něco více než 3 hodiny (3,2 hodiny).

Úvaha

- 2 čerpadla původní počet: čím větší byl původní počet čerpadel, tím více vody bývá ve sklepě $\Rightarrow x = \frac{2}{1}$,
- 1,2 kWh výkon původních čerpadel: čím větší byl výkon původních čerpadel, tím více vody bývá ve sklepě $\Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1,2}{1}$,
- 8 hodin doba původního čerpání: čím déle se čerpal, tím více vody bývá ve sklepě $\Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 8}{1}$,
- 4 čerpadla nově: čím více čerpadel hasiči použijí, tím kratší čas budou na čerpání potřebovat $\Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 8}{4}$,
- 1,5 kWh výkon nových čerpadel: čím větší je výkon nových čerpadel, tím rychleji bude voda vyčerpaná $\Rightarrow x = \frac{2 \cdot 1,2 \cdot 8}{4 \cdot 1,5} = 3,2$ hodiny.

Výpočet

2 čerpadla	...	1,2 kWh	...	8 hodin
4 čerpadla	...	1,5 kWh	...	x hodin

Zachováme výkon čerpadel.

2 čerpadla	...	1,2 kWh	...	8 hodin
4 čerpadla	...	1,2 kWh	...	y hodin

Čím větší počet čerpadel, tím kratší doba čerpání \Rightarrow nepřímá úměrnost.

$$2 \cdot 8 = 4 \cdot y \quad / : 4 \quad (\text{množství čerpané vody se nemění})$$

$$y = \frac{2 \cdot 8}{4} = 4 \text{ hodin}$$

4 čerpadla	...	1,2 kWh	...	4 hodiny
4 čerpadla	...	1,5 kWh	...	x hodin

Čím větší výkon čerpadel, tím kratší doba čerpání \Rightarrow nepřímá úměrnost.

$$1,2 \cdot 4 = 1,5 \cdot x \quad / : 1,5 \quad (\text{množství vody se nemění})$$

$$x = \frac{1,2 \cdot 4}{1,5} = 3,2 \text{ hodiny}$$

Čerpání vody bude trvat 3,2 hodiny.

Př. 10: Zlatovláska protančila během osmi pětihodinových plesů pět párů střevíčků. Kolik střevíčků protančila v sousedním království během turné na šesti čtyřhodinových plesech?

Odhad

Počet plesů se zmenšil o čtvrtinu, jejich délka o třetinu \Rightarrow spotřeba střevíčku by se měla zmenšit o necelou polovinu \Rightarrow Zlatovláska protančila přibližně tři páry střevíčků.

Úvaha

- 8 původních plesů: čím více plesů Zlatovláska protančila, tím odolnější jsou střevíčky a tím méně jich protančí na turné v sousedním království $\Rightarrow x = \frac{3}{8}$,

- 5 hodinové původní plesu: čím delší plesy Zlatovláska protančila, tím odolnější jsou střevíčky a tím méně jich protančí na turné v sousedním království $\Rightarrow x = \frac{5}{8 \cdot 5}$,
- 5 párů střevíčků: čím více střevíčků Zlatovláska protančila, tím méně střevíčky vydrží, tím více jich protančí na turné v sousedním království $\Rightarrow x = \frac{5}{8 \cdot 5}$,
- 6 plesů na turné: čím více plesů na turné Zlatovláska protančí, tím více protančí střevíčků $\Rightarrow x = \frac{5 \cdot 6}{8 \cdot 5}$,
- 4 hodinové plesy na turné: čím delší plesy na turné Zlatovláska protančí, tím více protančí střevíčků $\Rightarrow x = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{8 \cdot 5} = 3$ střevíčky.

Výpočet

8 plesů	...	5 hodin	...	5 párů
6 plesů	...	4 hodiny	...	x párů

Zachováme počet plesů.

8 plesů	...	5 hodin	...	5 párů
8 plesů	...	4 hodiny	...	y párů

Čím delší jsou plesy, tím více střevíčků protančí \Rightarrow přímá úměrnost.

$$\frac{y}{4} = \frac{5}{5} \quad / \cdot 4 \quad (\text{počet střevíčků, které protančí za hodinu plesu se nezmění})$$

$$y = \frac{5}{5} \cdot 4 = 4$$

8 plesů	...	4 hodin	...	4 páry
6 plesů	...	4 hodiny	...	x párů

Čím více plesů Zlatovláska protančí, tím více protančí střevíčků \Rightarrow přímá úměrnost.

$$\frac{x}{6} = \frac{4}{8} \quad / \cdot 6 \quad (\text{počet střevíčků, které protančí za jeden ples se nemění})$$

$$x = \frac{4}{8} \cdot 6 = 3 \text{ páry střevíčků}$$

Zlatovláska protančí na turné v sousedním království během šesti čtyřhodinových plesů tři páry střevíčků.

Př. 11: 5 montérů zkompletuje čtyři věže za 12 dní. Za jak dlouho zkompletuje sedm věží 8 montérů?

Odhad

Poměr, ve kterém se zvětší množství věží (7:4) je trochu větší než poměr, ve kterém se zvětší počet montérů (8:5) \Rightarrow celková doba kompletace se trochu prodlouží \Rightarrow 13 dní.

Úvaha

- 5 montérů původně: čím více montérů bylo kompletovalo původní sadu věží, tím je kompletace věží náročnější a tím déle bude trvat kompletace druhé sady $\Rightarrow x = \frac{5}{8}$,

- 4 věže původně: čím více věží konstruktéři zkompletovali v původní sadě, tím je kompletace věží jednodušší a tím kratší bude kompletace druhé sady $\Rightarrow x = \frac{5}{4}$,
- 12 dní původně: čím déle trvala kompletace první sady, tím je kompletace věží složitější a tím déle bude trvat kompletace druhé sady $\Rightarrow x = \frac{5 \cdot 12}{4}$,
- 7 věží nyní: čím více věží je třeba zkompletovat, tím déle bude kompletace trvat $\Rightarrow x = \frac{5 \cdot 12 \cdot 7}{4}$,
- 8 montérů nyní: čím více montérů se bude kompletace účastnit, tím rychleji bude hotová $\Rightarrow x = \frac{5 \cdot 12 \cdot 7}{4 \cdot 8} \doteq 13,1$ dne.

Výpočet

5 montérů	...	4 věže	...	12 dní
8 montérů	...	7 věží	...	x dní

Zachováme například počet věží.

5 montérů	...	4 věže	...	12 dní
8 montérů	...	4 věží	...	y dní

Čím větší počet montérů, tím kratší doba na kompletaci věží \Rightarrow nepřímá úměrnost.

$5 \cdot 12 = y \cdot 8 \quad / : 8$ (počet člověkodní na kompletaci se nemění)

$$y = \frac{5 \cdot 12}{8} = 7,5 \text{ dní}$$

8 montérů	...	4 věže	...	7,5 dní
8 montérů	...	7 věží	...	x dní

Čím větší je počet věží na kompletaci, tím delší dobu práce potrvá \Rightarrow přímá úměrnost.

$$\frac{x}{7} = \frac{7,5}{4} \quad / \cdot 7 \text{ (doba pro kompletaci jedné věže se nemění)}$$

$$x = \frac{7,5}{4} \cdot 7 \doteq 13,1$$

Kompletace 7 věží bude 8 montérům trvat 13,1 dne.

Př. 12: 5 trestanců spočítalo, že tunel na útěk z vězení vyhloubí za 120 dní. Po 15 dnech byl jeden z nich propuštěn na svobodu. Jak dlouho budou tunel dokončovat zbývající vězni?

5 trestanců mělo tunel vyhloubit za 120 dní \Rightarrow k vyhloubení tunelu je třeba $120 \cdot 5 = 600$ dní práce pro jednoho člověka (600 člověkodní).

Po 15 dnech jednoho propustili \Rightarrow odpracovali $15 \cdot 5 = 75$ člověkodní \Rightarrow zbývalo odpracovat $600 - 75 = 525$ člověkodní.

Tunel dokončují pouze čtyři vězni \Rightarrow dokončení bude trvat $525 : 4 = 131,25$ dní.

Zbývající vězni dokončí tunel 132 dní po propuštění kamaráda na svobodu.

Shrnutí: