

2.5.27 Promile

Předpoklady: 020526

Pedagogická poznámka: Na odhady nechávám jen chvíli cca 2 minut. Pak si kontrolujeme výsledky (2, 1, 0, -1 bod) a říkáme si, jak k odhadu dospět. Pak si žáci zjistí přesné hodnoty výpočtem.

Př. 1: Odhadni.

- a) 30 % z 990 b) 25 % z 115 c) 90 % z 15 d) 115 % z 90

a) 30 % z 990

Odhad: 30 % je o trochu méně než třetina \Rightarrow 300.

Výpočet: $990 \cdot 0,3 = 297$.

b) 25 % z 115

Odhad: 25 % je čtvrtina \Rightarrow 29.

Výpočet: $115 \cdot 0,25 = 28,75$.

c) 90 % z 15

Odhad: 90 % je o desetinu méně než základ \Rightarrow 13,5.

Výpočet: $15 \cdot 0,9 = 13,5$.

d) 115 % z 90

Odhad: 115 % je o necelou pětinu více než základ \Rightarrow 105.

Výpočet: $90 \cdot 1,15 = 103,5$.

Pedagogická poznámka: Odhady jsou důležité. Žáci nemají k dispozici kalkulačky a nemohou se tedy opřít o mechanické násobení. Často se objeví i problémy se vztahem mezi zlomky a desetinnými čísly.

Př. 2: Rozhodni co je víc: 25 % ze 55 nebo 55 % z 25?

Obě hodnoty jsou stejné. Při výpočtu násobíme „stejná čísla“, jediný rozdíl je v tom, které z nich ještě zmenšíme stokrát.

25 % z 55: $0,25 \cdot 55 = 13,75$

55 % z 25: $0,55 \cdot 25 = 13,75$

Jinak: 25 % z 55: $0,25 \cdot 55 = 25 \cdot 0,01 \cdot 55 = 25 \cdot 0,55$ což je 55 % z 25.

Př. 3: Co znamená slovo promile? Hledej podobná cizí slova, jejichž význam znáš.

Podobná slova:

- procento (setina) – stejný začátek, druhá půlka slova je cizí a odlišná,
- milénium – tisíciletí,
- míle – tisíc dvojkroků (jednotka vzdálenosti)
- ...

Promile znamená tisícinu z nějakého základu.

Jedno promile z daného celku je jedna tisícina z tohoto celku (1 ‰ z celku je $\frac{1}{1000}$ z celku čili 0,001 z celku).

Promile je definováno velmi podobně jako procento \Rightarrow můžeme s ním pracovat zcela analogicky.

Pedagogická poznámka: Původně jsem zařadil do hodiny ihned slovní úlohy. Předpokládal jsem, že žáci budou postupovat stejně jako u procent nebudou mít žádné problémy. Ukázalo se, že sice chápou, co promile znamenají, ale pracovat s nimi ihned ve slovních úlohách jim dělá potíže.

Př. 4: Urči z paměti.

- a) 1 ‰ z 5000 b) 3 ‰ z 20 000 c) 20 ‰ z 400 d) 7 ‰ z 10

- a) 1 ‰ z 5000 je 5 (tisícina z 5000 je 5)
 b) 3 ‰ z 20 000 jsou 60 (tisícina z 20 000 je 20)
 c) 20 ‰ z 400 je 8 (tisícina z 400 je 0,4; $20 \cdot 0,4 = 8$)
 d) 7 ‰ z 10 je 0,07 (tisícina z 10 je 0,01)

Př. 5: Vypočti.

- a) 7 ‰ z 450 b) 13 ‰ z 8000 c) 41 ‰ z 49

- a) 7 ‰ z 450 je 3,15 (protože $0,007 \cdot 450 = 3,15$).
 b) 13 ‰ z 8000 je 104 (protože $0,013 \cdot 8000 = 104$).
 c) 41 ‰ z 49 je 2,009 (protože $0,041 \cdot 49 = 2,009$).

Př. 6: Doplně tabulku.

základ	78		870		5	
počet promilí	155	25		785		
část základu		14	1	45	0,06	
postup						$\frac{1,1}{1,3}$

základ	78	560	870	57,3	5	1,3	0,846
počet promilí	155	25	1,15	785	12	846	1300
část základu	12,09	14	1	45	0,06	1,1	1,1
postup	$78 \cdot 0,155$	$\frac{14}{0,025}$	$\frac{1}{870}$	$\frac{45}{0,785}$	$\frac{0,06}{5}$	$\frac{1,1}{1,3}$	$\frac{1,1}{1,3}$

Prekvapivé pro žáky je, že poslední sloupec má dvě řešení.

Př. 7: Kolik procent je:

- a) 100 ‰ b) 20 ‰ c) 5 ‰ d) 0,3 ‰ e) x ‰

a) $100 \text{ ‰} = 10 \%$ b) $20 \text{ ‰} = 2 \%$ c) $5 \text{ ‰} = 0,5 \%$

d) $0,3 \text{ ‰} = 0,03 \%$ e) $x \text{ ‰} = \frac{x}{10} \%$

Př. 8: Vyjádři procenta v promile.

- a) 10 % b) 5 % c) 200 % d) 0,6 % e) x %

a) $10 \text{ ‰} = 100 \text{ ‰}$ b) $5 \text{ ‰} = 50 \text{ ‰}$ c) $200 \text{ ‰} = 2000 \text{ ‰}$

d) $0,6 \text{ ‰} = 6 \text{ ‰}$ e) $x \text{ ‰} = 10x \text{ ‰}$

Př. 9: Jirka jel v Praze na černo a chytil ho revizor. Měl zaplatit 1 500 Kč, ale nejdřív neměl peníze a pak na to zapomněl. Pokud nezaplatí včas, bude mu za každý den prodlení účtováno penále ve výši 0,5 ‰ z dlužné částky. Na kolik se jeho dluh zvýší, když si vzpomene až tři měsíce po vypršení lhůty? Na kolik se jeho dluh zvýší, když se mu ozve inkasní agentura, které dopravní podnik pohledávku přeprodal, po dvou letech?

Tři měsíce (90 dní): $1\,500 \cdot 0,0005 \cdot 90 = 67,50 \text{ Kč} \Rightarrow$ dluží 1 568 Kč.

Dva roky ($2 \cdot 365 = 730$): $1\,500 \cdot 0,0005 \cdot 730 = 547,5 \text{ Kč} \Rightarrow$ dluží 2 048 Kč.

Dodatek: Výsledky předchozího příkladu nepopisují přesně situaci, ve které se Jirka nachází. Již druhý den prodlení totiž dluží větší částku než 1500 Kč – dluží 1500 Kč a penále z prodlení za předchozí den. Penále, které by měl zaplatit za druhý den je tak nepatrně větší než penále za předchozí den. Pokud dále neplatí, každý další den se zvětšuje jak částka, kterou dluží, tak částka, kterou platí jako penále. Modelování této situace pomocí geometrických řad není obtížné, ale je zcela mimo možnosti matematiky na základní škole. Pro tři měsíce tak získáme 1569 Kč (rozdíl 1 Kč), pro dva roky 2160,60 Kč (rozdíl 395 Kč).

Dodatek: Výška penále se nemusí přesně rovnat skutečnému penále, které si účtuje dopravní podnik v Praze. Konkrétní údaj pro tuto situaci se mně totiž nepodařilo nikde najít v normálním limitu 15 minut.

Př. 10: "Stoupání nebo klesání je geometrický sklon úseku cesty (silnice, kolejí apod.) neboli úhel mezi vodorovnou rovinou a cestou. Pro technické účely se obvykle udává v procentech. Například stoupání 5 % znamená, že ujde-li cestovatel kolmo na vrstevnice 100 metrů ve směru svíslého průmětu (po mapě), vystoupá přitom o 5 výškových metrů. V opačném směru by o stejný počet výškových metrů poklesl. V železniční dopravě jsou stoupání výrazně menší, takže se měří obvykle v promile (‰). Klesání 15 ‰ znamená, že na následujících 100 metrech vlak klesne o ..."

Wikipedie (Stoupání. 21. 2. 2014)

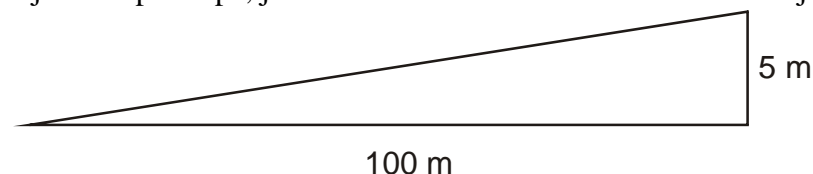
Dokonči větu.

Maximální možné stoupání železniční dráhy je uváděno 40 ‰. Jak dlouhá musí být trať, která má vystoupat 350 výškových metrů?

Vystoupá o 5 m \Rightarrow jde o svislou vzdálenost.



Ujde 100 po mapě, jde o sklon mezi vodorovnou rovinou \Rightarrow jde o vodorovnou vzdálenost.



Klesání 15 ‰ znamená, že na následujících 100 metrech vlak klesne o 1,5 metru.

V definici představuje svislá vzdálenost procentovou (promilovou) část, vodorovná základ \Rightarrow příklad můžeme řešit trojčlenkou.

40 ‰	...	350 m
1000 ‰	...	x

$$\frac{x}{1000} = \frac{350}{40} \quad / \cdot 1000$$

$$x = \frac{350}{40} \cdot 1000 = 8750 \text{ m}$$

Železniční trať, která by vystoupala o 350 m, musí mít vodorovnou vzdálenost minimálně 8750 m.

Pedagogická poznámka: Žáci mají velké problémy rozklíčovat, co vlastně definice stoupání říká (zejména část „ujde-li cestovatel kolmo na vrstevnice 100 metrů ve směru svislého průmětu (po mapě)“ je pro ně nesrozumitelná). Nevysvětluji jim definici, diskutujeme postupně \Rightarrow nejdříve obrázek (pravoúhlý trojúhelník), pak popisujeme strany (5 svislých metrů je jasných), zbývá umístit 100 m, někdo si nakonec vzpomene na počátek definice, kde se mluví o úhlu mezi vodorovnou rovinou a cestou.

Př. 11: Alkoholikovi na záchytce naměřili 2,5 ‰ alkoholu v krvi. Kolik alkoholu má v krvi, jestliže u dospělého člověka představuje krev přibližně 8% hmotnosti a alkoholik vážil 90 kg? Jaké množství tvrdého čtyřicetiprocentního lihu vypil?

Nejdříve musíme určit hmotnost krve.

$$8 \text{ ‰ z } 90: 90 \cdot 0,08 = 7,2 \text{ kg}$$

Nyní můžeme určit hmotnost lihu.

$$2,5 \text{ ‰ z } 7,2 \text{ kg: } 0,0025 \cdot 7,2 = 0,018 \text{ kg}$$

Nyní určíme hmotnost čtyřicetiprocentního lihu.

40 %	...	0,018 kg
100 %	...	x

$$\frac{x}{100} = \frac{0,018}{40} \quad / \cdot 100$$

$$x = \frac{0,018}{40} \cdot 100 = 0,045 \text{ kg}$$

Alkoholik vypil 0,045 kg 40 % lihu.

Př. 12: Poslední bod předchozího příkladu není vyřešen správně. Najdi na internetu informace o alkoholu, obrázek etikety tvrdého alkoholu a najdi chyby v postupu.

První chyba: alkohol se vstřebává do krve postupně a rovnou se odbourává \Rightarrow alkoholik musel alkoholu vypít více.

Druhá chyba: Hustota lihu se liší od hustoty vody \Rightarrow záleží na tom, zda počítáme v gramech (hmotnostní poměr) nebo v litrech (objemový poměr).



Obsah alkoholu v lihovinách je udáván pomocí objemového poměru (zkratky obj. nebo vol.) \Rightarrow musíme hmotnost čistého lihu přepočítat na objem.

Hustota lihu: 790 kg/m^3 .

1000 litrů	...	790 kg
x litrů	...	0,018 kg

$$\frac{x}{0,018} = \frac{1000}{790} \quad / \cdot 0,018 \quad (\text{objem 1 kg lihu se nemění})$$

$$x = \frac{1000}{790} \cdot 0,018 \doteq 0,023 \text{ litru}$$

Nyní určíme objem čtyřicetiprocentního lihu.

40 % ... 0,023 litru

100 % ... x litru

$$\frac{x}{100} = \frac{0,023}{40} \quad / \cdot 100$$

$$x = \frac{0,023}{40} \cdot 100 \doteq 0,058 \text{ litru}$$

Alkoholik vypil 0,058 litru 40 % lihu.

Shrnutí: Jedno promile představuje tisícinu celku.