

2.5.28 Procenta okolo nás II

Předpoklady: 020527

Pedagogická poznámka: Spočítat obsah lekce během 45 minut není reálné. Je možné se rozhodnout a vynechat buď úvodní příklady na prohazovací trik nebo příklady z lyžáku, případně se rozloučit s náplní konce hodiny.

Př. 1: Pro některé příklady s procenty je možné při počítání bez kalkulačky použít jednoduchý trik. Zkus tímto trikem rychle spočítat kolik jsou 12 % z 25.

Klasický postup: $0,12 \cdot 25 =$

Trik: $0,12 \cdot 25 = 0,25 \cdot 12 = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$

Př. 2: Předchozí příklad jde spočítat takto: místo 12 % z 25, spočítáme 25 % z 12, což je jednodušší, protože 25 % ze základu je čtvrtina a tedy 25 % z 12 jsou 3. Vysvětli, proč je možné takovou záměnu udělat.

Rozepíšeme klasický postup a změníme ho na trik.

12 % z 25: $0,12 \cdot 25 = 12 \cdot 0,01 \cdot 25 = 25 \cdot 0,01 \cdot 12 = 0,25 \cdot 12$, což představuje 25 % z 12.

Trik je důsledkem komutativnosti násobení.

Př. 3: Spočti pomocí triku z předchozích příkladů z paměti tyto příklady:

a) 36 % z 50 b) 24 % z 150 c) 65 % z 20 d) 45 % z 80

a) 36 % z 50 nahradíme jako 50 % z 36: $0,5 \cdot 36 = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$

b) 24 % z 150 nahradíme jako 150 % z 24: $1,5 \cdot 24 = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$

c) 65 % z 20 nahradíme jako 20 % z 65: $0,2 \cdot 65 = \frac{1}{5} \cdot 65 = 13$

d) 45 % z 80 nahradíme jako 80 % z 45: $0,80 \cdot 45 = \frac{4}{5} \cdot 45 = 36$

Př. 4: Které příklady na výpočet procent je možné si ulehčit pomocí prohazovacího triku? Vymyslí další ulehčitelné zadání.

Zjednodušit si můžeme příklady, ve kterých se základ rovná číslu, jehož setina představuje zlomek s malým čitatelem (například 50, protože $0,5 = \frac{1}{2}$ nebo 60, protože $0,6 = \frac{3}{5}$).

Snadnosti výpočtu pomáhá, když počet procent se rovná číslu, které je číslem ve jmenovateli zlomku dělitelné).

Další zjednodušitelná zadání:

- 14 % z 50
- 8 % z 250
- 15 % z 40
- ...

Tématické příklady po skončení lyžařského kurzu

Př. 5: První družstvo mělo původně 12 členů. Uplynulo několik pár dní výcviku a 25 % členů zůstalo na chatě kvůli zdravotním problémům. Kolik členů prvního družstva lyžuje?

25 % členů zůstalo na chatě \Rightarrow 75 % lyžuje.
 $0,75 \cdot 12 = 9$

Stále lyžuje 9 členů družstva.

Př. 6: Devět členů lyžařského družstva stojí na svahu. Pět z nich fňuká, že je bolí nohy, čtyři si potřebují balit. Jen dva členové nemají žádný problém. Kolik procent členů družstva bolí nohy a ještě potřebuje (pře)balit?

2 členové nemají problém \Rightarrow 7 členů má jeden nebo oba problémy.

$4 + 5 = 9$, problémy má pouze 7 členů \Rightarrow 2 členy jsme započítali dvakrát a mají tedy oba problémy.

$$\frac{2}{9} \doteq 0,22$$

Přibližně 22 % členů družstva má problémy.

Př. 7: Šest členů (což je 37,5 %) lyžařského družstva jezdí z kopce a strašně v tom sedí. Kolik členů má družstvo?

6 členů	...	37,5 %
x členů	...	100 %

$$\frac{x}{100} = \frac{6}{37,5} \quad / \cdot 100$$

$$x = \frac{6}{37,5} \cdot 100 = 16$$

Družstvo má 16 členů.

Př. 8: Devět členů lyžařského týmu během 15 minut sedmkrát zaskuhrá. Kolik zaskuhrání by se za dvě hodiny ozvalo z dvanáctičlenného týmu?

Odhad vzorce:

- 9 původních členů: čím více členů mělo první družstvo, tím vzácnější je skuhrání a tím méně skuhrání by se ozvalo v druhém případě $\Rightarrow x = \frac{7}{9}$,
- 15 původních minut: čím více času mělo první družstvo, tím vzácnější je skuhrání a tím méně skuhrání by se ozvalo v druhém případě $\Rightarrow x = \frac{7}{9 \cdot 15}$,
- 7 zaskuhrání: čím vícekrát zaskuhralo první družstvo, tím je skuhrání častější a tím vícekrát zaskuhrá i druhé družstvo $\Rightarrow x = \frac{7}{9 \cdot 15}$,
- 120 minut: čím delší čas pozorujeme druhé družstvo, tím vícekrát se ozve zaskuhrání $\Rightarrow x = \frac{7 \cdot 120}{9 \cdot 15}$,
- 12 členů: čím větší počet členů má druhé družstvo, tím vícekrát se ozve zaskuhrání $\Rightarrow x = \frac{7 \cdot 120 \cdot 12}{9 \cdot 15} \doteq 75$.

Výpočet pomocí dvojité trojčlenky:

9 členů	...	15 minut	...	7 skuhrání
12 členů	...	120 minut	...	x skuhrání

Zachováme počet členů skupiny.

9 členů	...	15 minut	...	7 skuhrání
9 členů	...	120 minut	...	y skuhrání

Čím déle skupinu pozorujeme, tím vícekrát se zvýší počet zaskuhrání \Rightarrow přímá úměrnost.

$$\frac{y}{120} = \frac{7}{15} \quad / \cdot 120 \quad (\text{počet zaskuhrání za jednu minutu se nemění})$$

$$y = \frac{7}{15} \cdot 120 = 56$$

9 členů	...	120 minut	...	56 skuhrání
12 členů	...	120 minut	...	x skuhrání

Čím větší je počet členů skupiny, tím vícekrát se ozve zaskuhrání \Rightarrow přímá úměrnost.

$$\frac{x}{12} = \frac{56}{9} \quad / \cdot 12 \quad (\text{počet zaskuhrání na jednoho člena týmu se nemění})$$

$$x = \frac{56}{9} \cdot 12 \doteq 75$$

Z 12 členů skupiny se za dvě hodiny ozve 75 zaskuhrání.

Př. 9: Při nákupu dovolené můžeme ušetřit jednak nákupem Last minute (na poslední chvíli) nebo First minute (nákup v prvním okamžiku). Kolik může rodina ušetřit na zájezdu s plnou cenou 43900, pokud využijí slevu First minute v hodnotě 15 %?

$$43\,900 \cdot 0,15 = 6\,585 \text{ Kč}$$

Rodina může ušetřit 6 585 Kč.

Př. 10: Petra nastoupila do práce s nástupním platem 19 500 Kč. Po uplynutí zkušební lhůty má slíbeno zvýšení o 15 % a pokud se osvědčí, čeká ji po roce další zvýšení o 20 %. Jakého platu může po roce dosáhnout?

Po prvním zvýšení o 15 %, má plat 115 %: $19\,500 \cdot 1,15 = 22\,425$ Kč

Po druhém zvýšení o 20 % má plat 120 % z předchozí částky: $19\,500 \cdot 1,15 \cdot 1,2 = 26\,910$ Kč

Petra může po roce dosáhnout platu 26 910 Kč.

Př. 11: Ondřej zaměstnává o prázdninách své spolužáky. Ze mzdy, kterou jim platí, odevzdává 15 % na dani. Kolik celkem odevzdá na daních, když zaměstná pět spolužáků s čistou mzdou 9500 Kč?

Jako hrubou mzdu označujeme oficiální plat zaměstnance, část platu (například 15 % u smluv na vykonání díla) musí zaměstnanec odevzdat státu na daních, zbytek (čistá mzda) patří zaměstnanci.

15 % daň \Rightarrow čistá mzda představuje 85 % hrubé mzdy.

85 % ... 9500 Kč

15 % ... x Kč

$$\frac{x}{15} = \frac{9500}{85} \quad / \cdot 15$$

$$x = \frac{9500}{85} \cdot 15 \doteq 1\,676,47 \text{ Kč}$$

5 zaměstnanců: $5 \cdot 1\,676,47 = 8\,382,35 \doteq 8\,382$ Kč

Ondřej odevzdává na daních celkem 8 382 Kč.

Př. 12: Martina si přivydělává zprostředkováním brigád kamarádům. S každým se domluví na určitém počtu procent z jeho mzdy, které od něj za zprostředkování dostane. Kuba si na brigádě vydělal 8500 Kč a má ji dát 12 %, Ája si vydělala 11 200 Kč a za zprostředkování zaplatí 6 % a Julča má dát 10 % ze své mzdy 6900 Kč. Kolik dostane Martina dohromady?

Peníze od jednotlivých spolužáků:

- Kuba: $8500 \cdot 0,12 = 1020$ Kč,
- Ája: $11\,200 \cdot 0,06 = 672$ Kč,
- Julča: $6900 \cdot 0,10 = 690$ Kč.

Celkem: $1020 + 672 + 690 = 2382$ Kč.

Martina dostane za zprostředkování brigád celkem 2382 Kč.

Př. 13: Zájezd stojí pro dospělého člověka 18 750 Kč, děti do 10 let mají slevu 20 %, děti do 15 let slevu 15 %. Kolik zaplatí pětičlenná rodina se dvěma dospělými a dětmi ve věku 9, 11 a 13 let?

- Dospělí: $2 \cdot 18\,750 = 37\,500$ Kč,
- děti 11 a 13 let: $18\,750 \cdot 0,85 \cdot 2 = 31\,875$ Kč,

- dítě 9 let: $18\,750 \cdot 0,80 = 15\,000$ Kč.

Celkem: $37500 + 31875 + 15000 = 84\,375$ Kč.

Pětičlenná rodina zaplatí za dovolenou 84 375 Kč.

Pedagogická poznámka: Diskuse o následujícím příkladu s celou třídou obvykle následuje až na začátku další hodiny. Rychlejší část třídy problém řeší diskusí mezi sebou a konfrontací se zdroji na internetu.

Př. 14: Mlékárna odebírá mléko, které obsahuje 4,3 % tuku (4,3 % hmotnosti mléka tvoří tuk). Mlékárna část tuku odebere a vyrobí z něj máslo (82 % tuku) a polotučné mléko (1,5 % tuku). Kolik litrů mléka je potřeba na výrobu jedné kostky másla (250 g)?

Kolik g tuku je třeba na výrobu kostky másla: 82 % z 250 g: $0,82 \cdot 250 = 205$ g.

První odhad: 100 g mléka obsahuje 4,3 g tuku, po odebrání 2,8 g tuku ho zbude 1,5 g.

100 g mléka ... 2,8 tuku
 x g mléka ... 250 g tuku

$$\frac{x}{250} = \frac{100}{2,8} \quad / \cdot 250$$

$$x = \frac{100}{2,8} \cdot 250 \doteq 8900 \text{ g mléka}$$

Správný odhad

Mléko, které vznikne podle předchozího postupu, nemá obsah mléka 1,5 %: původně 100 g mléka obsahovalo 4,3 g tuku a 96,7 g ostatních látek, po odebrání tuku tak aby ho zbylo 1,5 g

máme: tuk 1,5 g, zbytek 95,7 g \Rightarrow obsah tuku $\frac{1,5}{95,7+1,5} \doteq 0,0154 \Rightarrow$ obsah tuku je 1,54 %

(více než měl být). Důvod je jasný, máme sice 1,5 g tuku, ale netučného mléka není 98,5 g \Rightarrow ze 100 g tučného mléka musíme odebrat více tuku než 2,8 g, abychom získali mléko s 1,5 % tuku.

Odebereme x g tuku \Rightarrow ze 100 g tučného mléka zůstane $100 - x$ polotučného mléka s $4,3 - x$

g tuku, který by měl tvořit 1,5 % $\Rightarrow \frac{4,3-x}{100-x} = 0,015 \quad / \cdot (100-x)$.

$$4,3 - x = 0,015 \cdot (100 - x)$$

$$4,3 - x = 1,5 - 0,015x \quad / +x$$

$$4,3 = 1,5 + x - 0,015x \quad / -1,5$$

$$2,8 = 0,985x \quad / : 0,985$$

$$x = 2,843$$

Z 100 g tučného mléka musíme odebrat 2,843 g tuku, abychom získali polotučné mléko s obsahem tuku 1,5 %.

Získanou hodnotu můžeme využít v přímé úměře (analogické nesprávnému postupu z úvodu řešení)

100 g mléka ... 2,843 tuku

x g mléka ... 250 g tuku

$$\frac{x}{250} = \frac{100}{2,843} \quad / \cdot 250$$

$$x = \frac{100}{2,843} \cdot 250 \doteq 8\,800 \text{ g mléka}$$

K výrobě jedné kostky másla potřebujeme 8,8 litru tučného mléka.

Pedagogická poznámka: Nedá se očekávat, že by žáci samostatně místo prvního odhadu počítali ten správný, je třeba je trochu popostrčit, aby začali přemýšlet o tom, že získané mléko bude mít větší procentu tuku než 1,5.

Shrnutí: