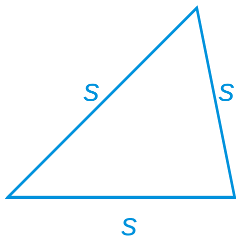
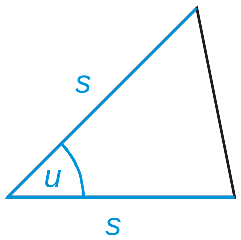
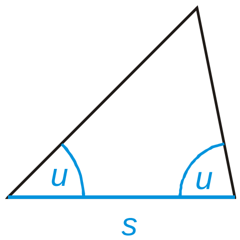
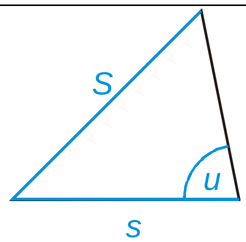
2.7.4 Lichoběžník II

Předpoklady: 020703

Pedagogická poznámka: Na počátku hodiny kontrolujeme poslední příklad z minulé hodiny. Na první tři body určitě někdo přijde, poslední bod pak dodávám já. Při kontrole se snažíme i o správnou formulaci (například pravidlo pro úhly se většinou na začátku objevuje ve formě "dvojice úhlů jsou shodné").

Vlastnosti rovnoramenného lichoběžníku zjištěné na konci minulé hodiny:
- shodné úhly při každé základně,
- osová souměrnost podle společné osy obou základen,
- obě úhlopříčky jsou shodné,
- rovnoramenný lichoběžník má kružnici opsanou.

Př. 1: Zopakuj čtyři věty o shodnosti trojúhelníků?

věta *sss*	**věta *sus***	**věta *usu***	**věta *Ssu***
			 $S > s$

Jestliže se dva trojúhelníky shodují:
- ve třech stranách (věta *sss*),
- ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném (věta *sus*),
- ve straně a přilehlých úhlech (věta *usu*),
- ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich (věta *Ssu*).

pak jsou hodné.

Dodatek: velké písmeno v označení věty *Ssu* znamená, že má jít o větší stranu proti většímu úhlu.

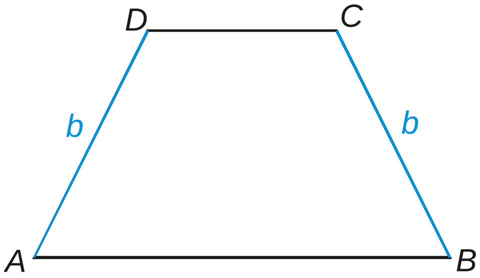
Př. 2: Všechny věty o shodnosti uvádějí tři prvky. Proč?

Trojúhelník je jednoznačně zadán třemi prvky. Každá věta o shodnosti je ve skutečnosti jednoznačným postupem na konstrukci trojúhelníku.

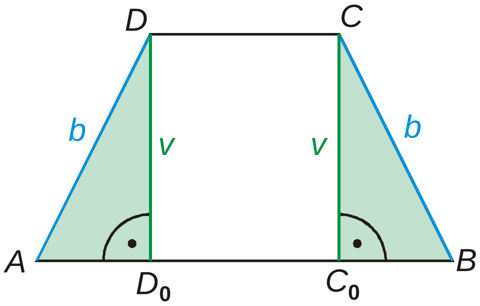
Pedagogická poznámka: Následující příklady žáci samozřejmě nejsou schopni vypracovat samostatně. řeším jej u tabule s tím, že se snažím, aby co nejvíce kroků provedli samostatně v lavicích.

Př. 3: Dokaž, že v rovnoramenném lichoběžníku jsou úhly při každé základně shodné.

Při důkazech vycházíme pouze z toho, co víme jistě o konkrétní situaci (rovnoramenný lichoběžník má shodná ramena) a z jistých pravidel (správně dokázaných dříve) (věty o shodnosti trojúhelníků).



Máme k dispozici pouze věty o shodnosti trojúhelníků $\Rightarrow$ vyznačíme si do lichoběžníku trojúhelníky, které obsahují, jak zkoumané úhly, tak shodná ramena.

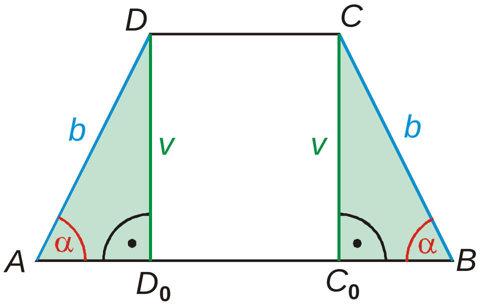


Zkoumáme vybarvené trojúhelníky. Shodují se v:

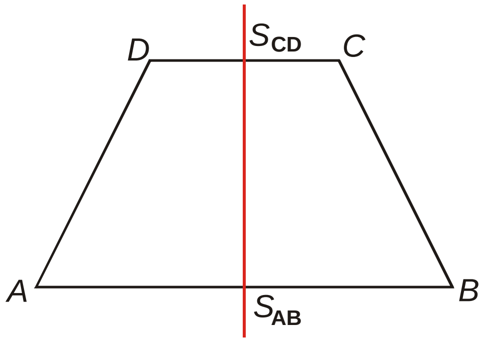
- stranách AD a BC (ramena rovnoramenného trojúhelníku),
- stranách DD_0 a CC_0 (výšky lichoběžníku),
- vyznačených pravých úhlech,

$\Rightarrow$ trojúhelníky jsou shodné podle věty *Ssu* (ramena leží proti pravému úhlu a proto jsou nejdelší stranou trojúhelníku).

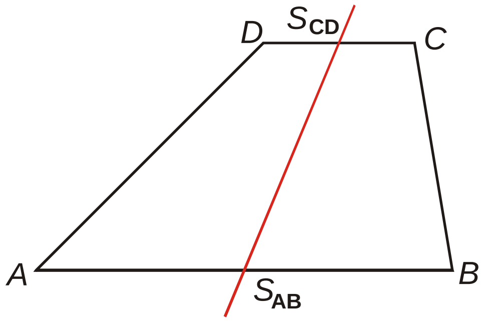
Trojúhelníky AD_0D a BC_0C jsou shodné $\Rightarrow$ shodují se ve všech vnitřních úhlech $\Rightarrow$ úhly D_0AD a C_0BC jsou shodné.



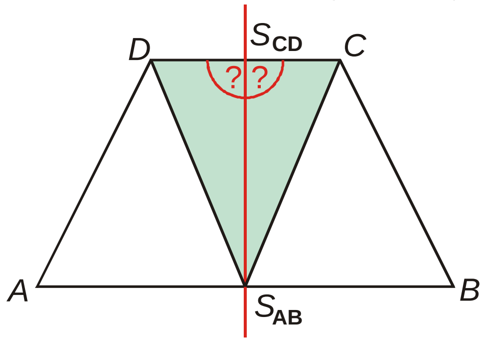
Př. 4: Nakresli rovnoramenný lichoběžník *ABCD*. Do obrázku dokresli přímku $S_{AB}S_{CD}$ a dokaž, že je osou lichoběžníku.



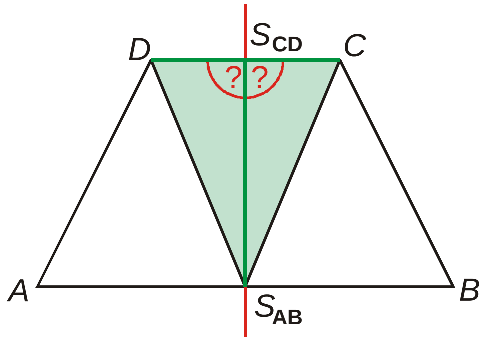
Co máme vlastně dokazovat?
Víme že přímka $S_{AB}S_{CD}$ půlí obě strany (procházejí jejich středy), ale nevíme, že na základny lichoběžníku kolmá (druhá nutná podmínka k tomu, aby byla osou). Právě tuto vlastnost přímka $S_{AB}S_{CD}$ v obecném lichoběžníku nemá (a proto v něm není osou).



$\Rightarrow$ Potřebujeme například dokázat, že platí $|\sphericalangle DS_{CD}S_{AB}| = |\sphericalangle CS_{CD}S_{AB}| = 90°$ $\Rightarrow$ nakreslíme si do obrázku dva trojúhelníky, které vypadají shodné a obsahují oba úhly.



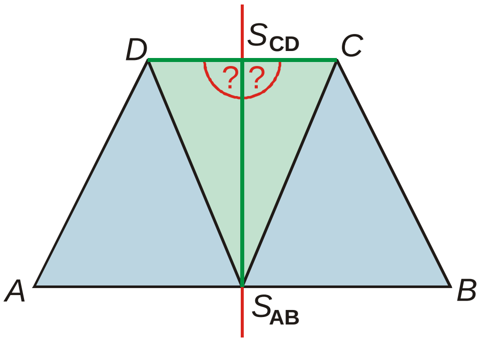
V čem se vyznačené trojúhelníky shodují?



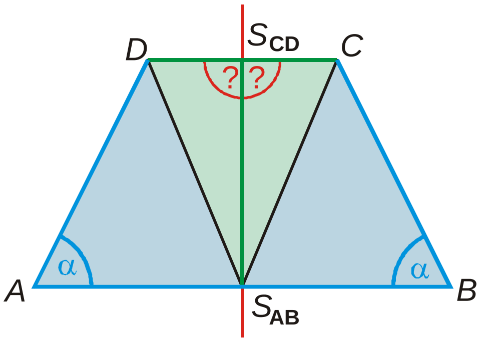
Trojúhelníky $DS_{CD}S_{AB}$ a $CS_{CD}S_{AB}$ se shodují v:

- stranách DS_{CD} a CS_{CD} (bod S_{CD} je střed strany *CD*),
- straně $S_{CD}S_{AB}$, která je společná.

O zbývající straně a žádných úhlech jistě nevíme, zda jsou shodné.



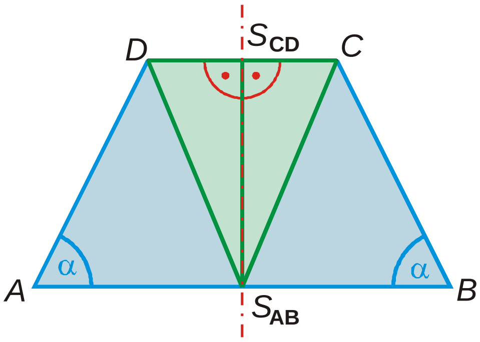
Zkusíme prozkoumat trojúhelníky ADS_{AB} a BCS_{AB}. Kdyby byly shodné, věděli bychom, že jsou shodné i strany DS_{AB} a CS_{AB}.



Trojúhelníky ADS_{AB} a BCS_{AB} se shodují v:

- stranách AS_{AB} a BS_{AB} (bod S_{AB} je střed strany *AB*),
- stranách *AD* a *BC* (ramena rovnoramenného lichoběžníku)
- úhlech DAS_{AB} a CBS_{AB} (jejich shodnost jsme dokázali před chvílí).

$\Rightarrow$ Trojúhelníky ADS_{AB} a BCS_{AB} jsou shodné podle věty *sus* $\Rightarrow$ strany DS_{AB} a CS_{AB} jsou shodné.



Trojúhelníky $DS_{CD}S_{AB}$ a $CS_{CD}S_{AB}$ se shodují v:

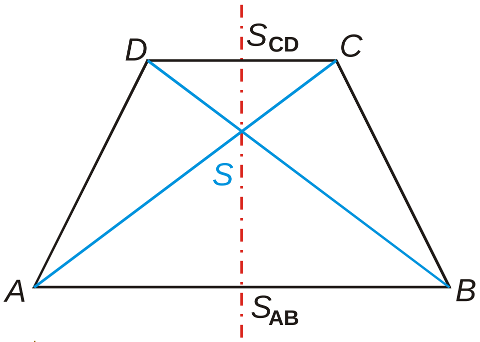
- stranách DS_{CD} a CS_{CD} (bod S_{CD} je střed strany *CD*),
- straně $S_{CD}S_{AB}$, která je společná,
- stranách DS_{AB} a CS_{AB}.

Trojúhelníky $DS_{CD}S_{AB}$ a $CS_{CD}S_{AB}$ jsou shodné podle věty *sss* $\Rightarrow$ platí $|\sphericalangle DS_{CD}S_{AB}| = |\sphericalangle CS_{CD}S_{AB}| = 90°$.
Protože přímky *CD* a *AB* jsou rovnoběžné, platí i $|\sphericalangle AS_{AB}S_{CD}| = |\sphericalangle BS_{AB}S_{CD}| = 90°$ $\Rightarrow$ přímka $S_{AB}S_{CD}$ je společnou osou stran *AB* a *CD* $\Rightarrow$ přímka $S_{AB}S_{CD}$ je osou lichoběžníku *ABCD* (který je tak osově souměrný).

Pedagogická poznámka: Úvodní poznámka a obrázek nerovnoramenného lichoběžníku jsou důležité, protože žáci nechápou, co mají dokazovat, protože úsečka $S_{AB}S_{CD}$ na obrázku vypadá jako osa.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady dělají zájemci, zbytek třídy je přeskakuje.

Př. 5: Pomocí osové souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku dokaž, že úhlopříčky rovnoramenného lichoběžníku jsou shodné a protínají se na přímce $S_{AB}S_{CD}$.



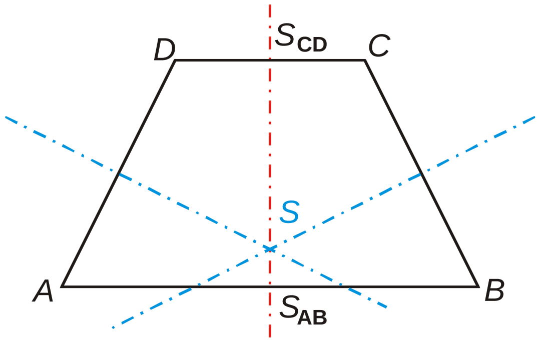
- Bod B je osobě souměrný s bodem A v osové souměrnosti s osou $S_{AB}S_{CD}$,
- bod D je osobě souměrný s bodem C v osové souměrnosti s osou $S_{AB}S_{CD}$,

$\Rightarrow$ úsečka AC je osově souměrná s úsečkou BD $\Rightarrow$

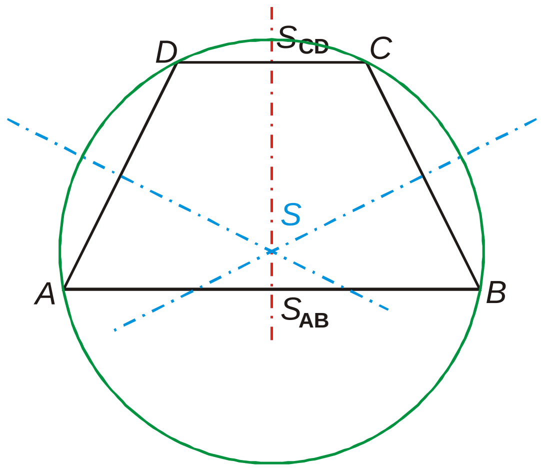
- úhlopříčky AC a BD mají stejnou délku,
- průsečík úhlopříčky AC s osou souměrnosti musí ležet ve stejném bodě jako průsečík úhlopříčky BD s osou souměrnosti $\Rightarrow$ úhlopříčky se protínají na přímce $S_{AB}S_{CD}$.

Př. 6: Pomocí osové souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku dokaž, že rovnoramenný lichoběžník má kružnici opsanou.

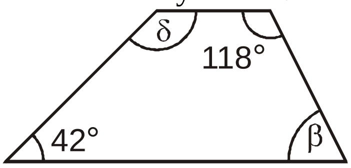
Aby měl lichoběžník kružnici opsanou, musely by se osy všech čtyř stran protínat v jednom bodě.



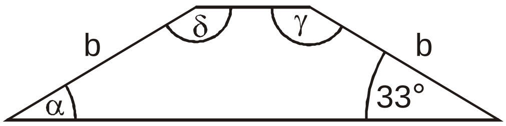
Osy stran AB a CD splývají v osu lichoběžníku $S_{AB}S_{CD}$.
Osa úsečky AD se s osou souměrnosti $S_{AB}S_{CD}$ protíná v nějakém bodě S. Osa úsečky BC je osově souměrná s osou úsečky AD $\Rightarrow$ musí se s osou souměrnosti $S_{AB}S_{CD}$ protínat ve stejném bodě S $\Rightarrow$ všechny čtyři osy se protínají v jednom bodě $\Rightarrow$ rovnoramenný lichoběžník má kružnici opsanou.

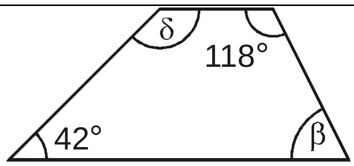
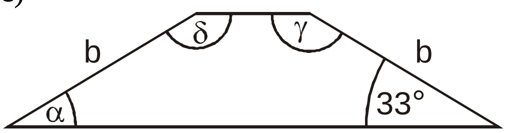


Př. 7: Překresli obrázky lichoběžníků do sešitu a dopočítej velikost jejich vnitřních úhlů.

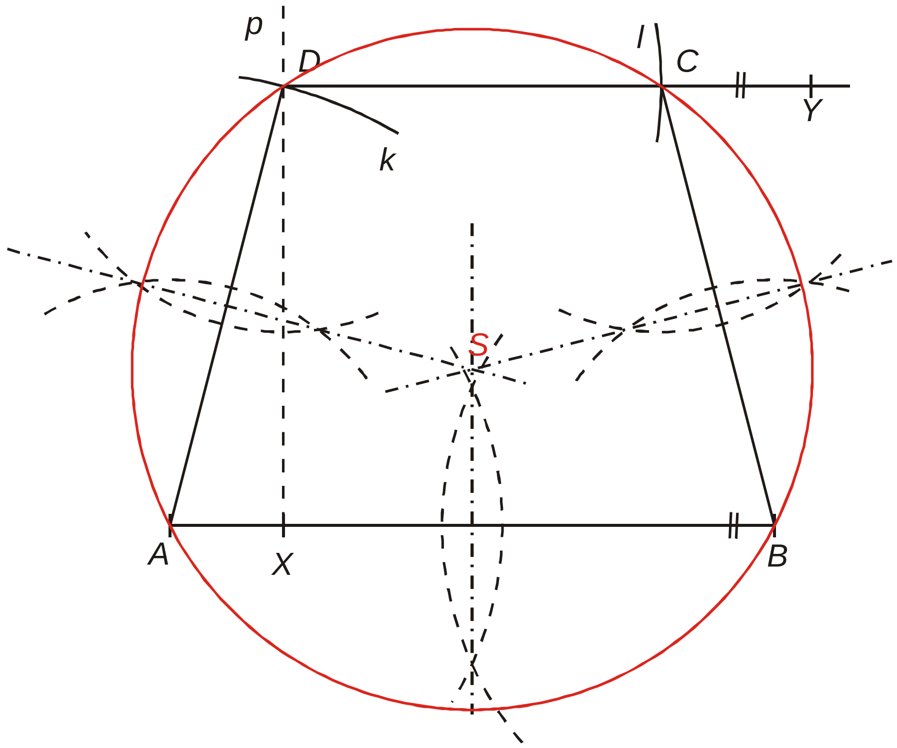
a) 

b) 

c) 

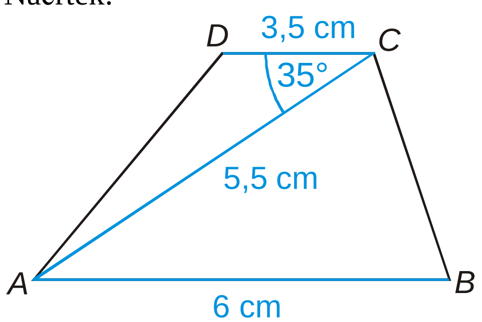
a) 	Součet úhlů přilehlých k jednomu rameni je 180° $\Rightarrow$ • $42^\circ + \delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$, • $\beta + 118^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$.
b) 	Součet úhlů přilehlých k jednomu rameni je 180° $\Rightarrow$ • $54^\circ + \delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$, • $\beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
c) 	Součet úhlů přilehlých k jednomu rameni je 180° $\Rightarrow$ • $33^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 33^\circ = 147^\circ$. Úhly přilehlé ke stejné základně jsou shodné: • $\alpha = \beta = 33^\circ$, • $\delta = \gamma = 147^\circ$.

Př. 8: Dorýsuj do obrázku z příkladu 5 z minulé hodiny kružnici lichoběžníku opsanou.

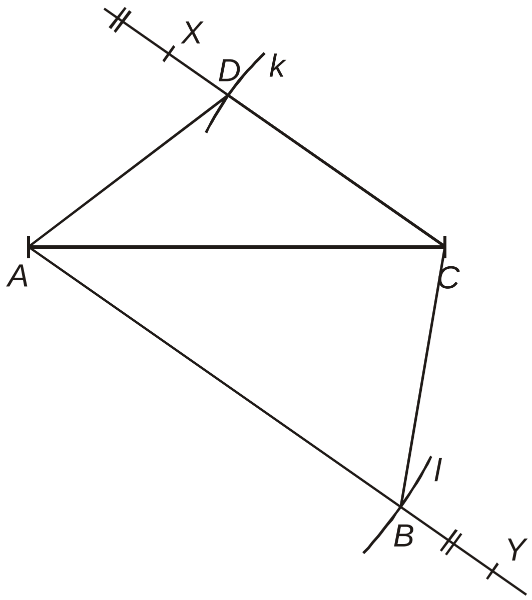


Př. 9: Sestroj lichoběžník *ABCD* se základnami *AB* a *CD*, je-li dáno: $|AB| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|AC| = 5{,}5\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle ACD| = 35°$. Napiš zápis konstrukce.

Náčrtek:



Nejdříve narýsujeme trojúhelník *ACD*, který pak doplníme na lichoběžník *ABCD*.



1. $AC,\ |AC| = 5{,}5\,\text{cm}$

2. $\mapsto CX,\ |\sphericalangle ACX| = 35°$

3. $k\left(C; |CD| = 3{,}5\,\text{cm}\right)$

4. $D \in \mapsto CX \cap k$

5. $\mapsto AY,\ AY \parallel CD$

6. $k\left(A; |AB| = 6\,\text{cm}\right)$

7. $B \in \mapsto AY \cap l$

Shrnutí: Speciální vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku můžeme dokázat pomocí vět o shodnosti trojúhelníků.