## 2.8.2 Druhá mocnina II

**Předpoklady:** 020802

**Př. 1:** Rozhodni, zda jsou pravdivé následující výroky.
a) Druhá mocnina libovolného čísla je kladné číslo.
b) Druhá mocnina libovolného čísla je větší než toto číslo.
c) Druhá mocnina lichého přirozeného čísla je liché přirozené číslo.
d) Druhá mocnina sudého přirozeného čísla je sudé přirozené číslo.
e) Druhá mocnina sudého přirozeného čísla je číslo dělitelné čtyřmi.
Všechna rozhodnutí zdůvodni. Výroky, které nejsou pravdivé, uprav tak, aby pravdivé byly.

Hodně nám napoví tabulka z minulé hodiny.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | -2 | 0,1 | -10 | 0,5 | -5 |
| $x^2$ | 0 | 25 | 49 | 64 | 81 | 121 | 4 | 0,01 | 100 | 0,25 | 25 |

a) Druhá mocnina libovolného čísla je kladné číslo.
Druhá mocnina z kladných čísel je kladná, druhá mocnina ze záporných čísel je také kladná, ale druhá mocnina nuly je nula (a to není kladné číslo) $\Rightarrow$ věta není pravdivá.
Možné opravy:

- Druhá mocnina libovolného čísla je nezáporné číslo.
- Druhá mocnina libovolného nenulového čísla je kladné číslo.

b) Druhá mocnina libovolného čísla je větší než toto číslo.
Není pravda, například $0,1^2 = 0,01$.

c) Druhá mocnina lichého přirozeného čísla je liché přirozené číslo.
Pravda. Liché číslo v sobě neobsahuje žádnou dvojku, druhá mocnina je vynásobení čísla samo sebou, kde se žádná dvojka objevit také nemůže.

d) Druhá mocnina sudého přirozeného čísla je sudé přirozené číslo.
Pravda. Sudé číslo v sobě obsahuje dvojku, druhá mocnina je vynásobení čísla samo sebou, bude dvojka také určitě obsažena.

e) Druhá mocnina sudého přirozeného čísla je číslo dělitelné čtyřmi.
Pravda. Sudé číslo v sobě obsahuje dvojku, druhá mocnina je vynásobení čísla samo sebou $\Rightarrow$ výsledek druhé mocniny obsahuje všechno, co obsahovalo původní číslo dvakrát $\Rightarrow$ obsahuje tedy i dvě dvojky $\Rightarrow$ je dělitelné čtyřmi.

**Pedagogická poznámka:** Nejmenší úspěšnost je u bodu a), kde žáci naprosto pomíjí první sloupec včerejší tabulky.

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako ve včerejší hodině se u některých žáků objeví násobení dvěma místo umocňování na druhou. Nejde však o nepochopení spíše o nepozornost, po upozornění se žáci rychle a sami opraví.

**Př. 2:** Doplň tabulku druhých mocnin.

| $x$ | 4 | -3 | 0,2 | 100 | -12 | 0,7 | -11 | -0,2 | 1,2 | 0,03 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | | | | | | | | | | 4 | 36 |

| $x$ | 4 | -3 | 0,2 | 100 | -12 | 0,7 | -11 | -0,2 | 1,2 | 0,03 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 16 | 9 | 0,04 | 10000 | 144 | 0,49 | 121 | 0,04 | 1,44 | 0,0009 | 4 | 36 |

**Př. 3:** Vypočti druhé mocniny z uvedených čísel. Hledej postup, kterým by sis výpočet ulehčil.

| $x$ | 70 | 200 | 90 | 3000 | 60 | 900 | 50 | 110 | 8000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | | | | | | | | |

| $x$ | 70 | 200 | 90 | 3000 | 60 | 900 | 50 | 110 | 8000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 4900 | 40 000 | 8100 | 9 000 000 | 3600 | 810 000 | 2500 | 12100 | 64 000 000 |

Přední část bez nul umocníme jako normálně a za výsledek připíšeme dvojnásobek nul než bylo v původním čísle.

**Pedagogická poznámka:** Žáci umocňují předchozí i následující příklad spontánně většinou dobře, ale spíše ve smyslu slovního popisu uvedeného v řešení příkladu. Že jde o rozklad mocniny z jednoho čísla na součin dvou mocnin dvou čísel, je asi nutné jim vnutit (předvést).

**Př. 4:** Správnost předchozího výpočtu v tabulce si můžeme dokázat rozepsáním: $70^2 = (7\cdot 10)^2 = 7\cdot 10\cdot 7\cdot 10 = 7\cdot 7\cdot 10\cdot 10 = 7^2\cdot 10^2 = 49\cdot 100 = 4900$. Zvol si libovolný další sloupec v předchozí tabulce a rozepsáním dokaž správnost výpočtu.

Například:

$$200^2 = (2\cdot 100)^2 = 2\cdot 100\cdot 2\cdot 100 = 2\cdot 2\cdot 100\cdot 100 = 2^2\cdot 100^2 = 4\cdot 10000 = 40\,000$$

$$90^2 = (9\cdot 10)^2 = 9\cdot 10\cdot 9\cdot 10 = 9\cdot 9\cdot 10\cdot 10 = 9^2\cdot 10^2 = 81\cdot 100 = 8100$$

$$110^2 = (11\cdot 10)^2 = 11\cdot 10\cdot 11\cdot 10 = 11\cdot 11\cdot 10\cdot 10 = 11^2\cdot 10^2 = 121\cdot 100 = 8100$$

Postup z předchozího příkladu se obvykle zkracuje takto

$$70^2 = (7\cdot 10)^2 = 7^2\cdot 10^2 = 49\cdot 100 = 4900.$$

**Př. 5:** Vypočti druhé mocniny z uvedených čísel. Hledej postup, kterým by sis výpočet ulehčil.

| $x$ | 0,9 | 0,02 | 0,003 | 0,07 | 0,005 | 0,0006 | 0,05 | 0,08 | 0,012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | | | | | | | | |

| $x$ | 0,9 | 0,02 | 0,003 | 0,07 | 0,005 | 0,0006 | 0,05 | 0,08 | 0,012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0,81 | 0,0004 | 0,000 009 | 0,0049 | 0,000 025 | 0,000 000 36 | 0,0025 | 0,0064 | 0,000144 |

Postupujeme podobně jako v příkladu 3. Číslo rozdělíme na součin, každou část umocňujeme zvlášť a získaná čísla pak opět vynásobíme.

$0,9^2 = 9^2 \cdot 0,1^2 = 81 \cdot 0,01 = 0,81$

$0,005^2 = 5^2 \cdot 0,001^2 = 25 \cdot 0,000001 = 0,000025$

Pravidlo z předchozích dvou příkladů se zapisuje vzorcem: $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

Vzorec $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ můžeme také přečíst:

- levá strana obsahuje závorku (v ní je součin dvou čísel) na druhou $\Rightarrow$ jde o druhou mocninu součinu dvou čísel,
- pravá strana obsahuje součin dvou výrazu, oba jsou druhé mocniny $\Rightarrow$ jde o součin druhých mocnin.

**Vzorec $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ čteme: Druhá mocnina součinu je rovna součinu druhých mocnin.**

**Př. 6:** Přečti následující výrazy.
a) $a+b$ b) $a:b$ c) $a^2-a$ d) $a^3 \cdot b^3$ e) $a^2+b^2$

a) $a+b$: součet dvou čísel

b) $a:b$: podíl dvou čísel

c) $a^2-a$: rozdíl druhé mocniny a čísla

d) $a^3 \cdot b^3$: součin třetích mocnin dvou čísel

e) $a^2+b^2$: součet druhých mocnin dvou čísel.

**Př. 7:** Rozhodni, zda platí věta" Druhá mocnina ze součtu dvou čísel je rovna součtu druhých mocnin těchto čísel".

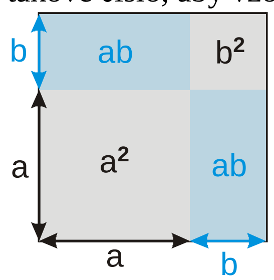
Nejdříve zapíšeme pravidlo vzorcem: $(a+b)^2 = a^2+b^2$.

Dosadíme za *a* a *b* (například $a=2$, $b=3$):

- levá strana: $(a+b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$,
- pravá strana: $a^2+b^2 = 2^2+3^2 = 4+9 = 13$,

obě strany se nerovnají $\Rightarrow$ vzorec $(a+b)^2 = a^2+b^2$ neplatí.

**Př. 8:** Vysvětli pomocí obrázku, proč $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$. Je možné dosadit za *a* nebo *b* takové číslo, aby vzorec platil?




Celý čtverec má délku strany $a+b$ a obsah $(a+b)^2$.

Čtverce o straně *a*, *b* a plochách $a^2$ a $b^2$ však tvoří jen část plochy (do celé plochy chybí obdélníky o obsahu *ab* $\Rightarrow$ vzorec neplatí.
Vzorec by platil pouze v případě, že by jedna ze vzdáleností *a*, *b* byla nulová (pak by obdélníky měly nulovou plochou).

**Shrnutí:** $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ **: druhá mocnina součinu je rovna součinu druhých mocnin.**