2.8.2 Druhá mocnina III

Předpoklady: 020802

Pedagogická poznámka: První tabulka je opakovací, druhá obsahuje „nové“ problémy.

Př. 1: Doplň tabulku druhých mocnin (bez kalkulačky).

x	30	-9	0,7	110	0,12		-0,04
x^2						16	

x	30	-9	0,7	110	0,12	4	-0,04
x^2	900	81	0,49	12100	0,0144	16	0,0016

Př. 2: Doplň tabulku druhých mocnin (bez kalkulačky).

x	-13	15	1,1	0,015	$\frac{1}{2}$	$2a$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$3a$	$-0,5a$	
x^2							0,09					-25

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad (2a)^2 = 2a\cdot 2a = 2\cdot 2\cdot a\cdot a = 4a^2 \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \qquad (3a)^2 = 3a\cdot 3a = 3\cdot 3\cdot a\cdot a = 9a^2$$

$$(-0,5a)^2 = (-0,5a)\cdot(-0,5a) = 0,5\cdot 0,5\cdot a\cdot a = 0,25a^2$$

x	-13	15	1,1	0,015	$\frac{1}{2}$	$2a$	0,3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$3a$	$-0,5a$	nejde
x^2	169	225	1,21	0,000225	$\frac{1}{4}$	$4a^2$	0,09	$\frac{9}{25}$	$\frac{4}{9}$	$9a^2$	$0,25a^2$	-25

Do posledního sloupce nemáme co doplnit, protože nemáme žádné číslo, které má zápornou druhou mocninu.

Pedagogická poznámka: Druhou tabulku zkontrolujeme ve chvíli, kdy mají studenti vyplněnou polovinu, poté mají ještě čas si opravit zbytek. Největší problémy jsou druhou mocninou výrazu $2a$, poslední řádek mají většinou všichni dobře. Zmínku o komplexních číslech příliš nedoporučuji. Většina chyb žákům dojde, pouze výrazy s neznámou je třeba řešit na tabuli. Někteří žáci si u zlomků pomohou desetinnými čísly (u jedné poloviny to je docela snadné), je třeba je pochválit za nalezení cesty, ale zároveň vyzvat k tomu, aby se pokusili najít řešení přímo ve zlomcích (další příklady již nejdou převést tak jednoduše).

Některé problémy s rovností $(2a)^2 = 4a^2$ vyplývají z toho, že si studenti neuvědomují priority operací (přednost umocňování před násobením) a výraz $4a^2$

chápou jako $4a \cdot 4a$ (z tohoto důvody byly změněny úvodní hodiny, ale zatím není jasné, jaký to bude mít důsledek na tento problém).

Př. 3: Doplň větu a zapiš ji vzorcem: "Druhá mocnina podílu je rovna ....". Napiš konkrétní dosazení do vzorce.

Podíl odpovídá zlomku $\Rightarrow$ několik sloupců předchozí tabulky $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Zkoušíme zapsat obecně pomocí písmen: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$.

Vzorec $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ vyjadřujeme slovy:

- levá strana: druhá mocnina (tu děláme nakonec) z podílu (zlomku $\frac{a}{b}$),
- pravá strana: podíl (zlomek) druhých mocnin (ve zlomku jsou a^2 a b^2)

Druhá mocnina podílu je rovna podílu druhých mocnin.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je pro žáky v podstatě neřešitelný. Jsou schopni doplnit vzorec, ale slovní vyjádření je pro ně obtížné (bez napsaného vzorce neřešitelné).

Př. 4: Která kladná čísla jsou menší než jejich druhá mocnina?

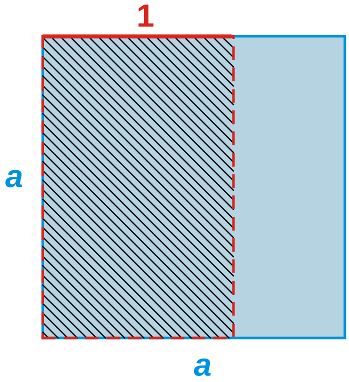
Postřehy z tabulky, několik dalších výpočtů:

x	3	15	1,1	0,015	0,7	0,9
x^2	9	225	1,21	0,000225	0,49	0,81

Zdá se, že čísla větší než 1 jsou menší než jejich druhá mocnina (umocňováním na druhou „se zvětšují“, protože násobení číslem větším než 1 „zvětšuje výsledek“).

Čísla větší než 1 jsou menší než jejich druhá mocnina.
Předchozí větu si můžeme dokázat geometricky.

Př. 5: Vysvětli, jak následující obrázek dokazuje, že čísla větší než 1 jsou menší než jejich druhá mocnina.

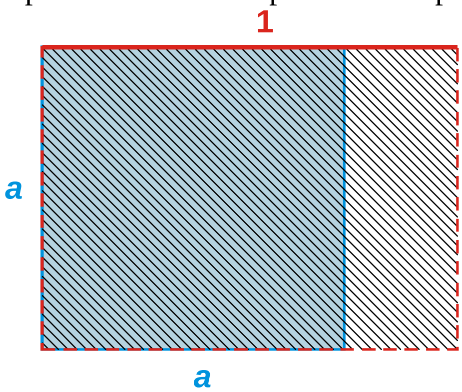


Druhá mocnina a^2 čísla a odpovídá ploše čtverce o straně a.
Vyšrafovaný obdélník má plochu $S = a \cdot 1 = a$ a vidíme, že tato plocha je menší než plocha čtverce a^2.
Pokud je délka strany čtverce větší než 1, je modrá plocha (a^2) větší než vyšrafovaná plocha (a) $\Rightarrow$ platí $a^2 > a$.

Př. 6: Která kladná čísla jsou větší než jejich druhá mocnina? Dokaž obrázkem (geometricky).

x	3	15	1,1	0,015	0,7	0,9
x^2	9	225	1,21	0,000225	0,49	0,81

Zdá se, že tuto vlastnost mají čísla menší než 1 („umocňováním se zmenšují", protože násobení číslem menším než 1 zmenšuje výsledek).
Upravíme obrázek z předchozího příkladu.



Druhá mocnina a^2 čísla a odpovídá ploše čtverce o straně a.
Vyšrafovaný obdélník má plochu $S = a \cdot 1 = a$ a vidíme, že tato plocha je větší než plocha čtverce a^2.
Pokud je délka strany čtverce menší než 1, je modrá plocha (a^2) menší než vyšrafovaná plocha (a) $\Rightarrow$ platí $a^2 < a$.

Př. 7: Která záporná čísla jsou menší než jejich druhá mocnina?

Druhá mocnina všech záporných čísel je kladná a tedy větší $\Rightarrow$ všechna záporná čísla jsou menší než jejich druhá mocnina.

Dodatek: Přesto se záporná čísla se při umocňování chovají podobně jako čísla kladná.

x	-3	-15	-1,1	-0,015	-0,7	-0,9
x^2	9	225	1,21	0,000225	0,49	0,81

U záporných čísel větších než –1 se absolutní hodnota výsledku (vzdálenost na ose od počátku) zmenšuje, u záporných čísel menších než –1, se absolutní hodnota výsledku zvětšuje.

Př. 8: Míra se vrhnul na pěstování česneku. Připravil si záhon 10 x 40 m. Kolik česneku sklidí, pokud se mu podaří dosáhnout výnosu 8 tun na hektar? Kolik za česnek může utržit na farmářském trhu při ceně 90 Kč za kilogram?

Plocha obdélníku: $S = ab = 10 \cdot 40\ \mathrm{m}^2 = 400\,\mathrm{m}^2 = 0{,}04\,\mathrm{ha}$

Hmotnost česneku: $0{,}04 \cdot 8\,\mathrm{t} = 0{,}32\,\mathrm{t} = 320\,\mathrm{kg}$.

Utržené peníze: $320 \cdot 90 = 30\,100$ Kč

Pokud Míra dosáhne výnosu 8 tun na hektar, vypěstuje 320 kg česneku, za který utrží 30 100 Kč.

Př. 9: Po úspěchu v první roce se Míra rozhodl s česnekem pokračovat a zakoupil kultivátor o záběru 4 m. Jak musí upravit rozměry záhonu s česnekem, aby zbytečně nejezdil, zachoval plochu z loňského roku a tvar záhonu měnil co nejméně?

Pokud má Míra využít kultivátor a nejezdit zbytečně, musí být šířka záhonu násobkem 4 m $\Rightarrow$ hledáme násobky 4 nejbližší 10 $\Rightarrow$ čísla 8 a 12.

- $a = 8$, $b = \frac{S}{a} = \frac{400}{8}\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{m}$,
- $a = 12$, $b = \frac{S}{a} = \frac{400}{12}\,\mathrm{m} = 33{,}\overline{3}\,\mathrm{m}$.

Míra záhon předělá buď na rozměr 8 x 50 m nebo 12 x 33 m.

Př. 10: O Mírových úspěších s česnekem se bohužel dozvěděli kromě zákazníků i zloději a většinu výpěstků sklidili v noci za něj. Proto se Míra v dalším roce rozhodl záhon oplotit. Jaký tvar a jaké rozměry záhonu má zvolit, aby byl obvod záhonu co nejmenší a plocha se nezměnila?

Jak si snadno můžeme ověřit pomocí provázku, největší plochu ohraničíme daným obvodem, pokud nakreslíme čtverec $\Rightarrow$ hledáme čtverec o ploše $400\ \mathrm{m}^2$.
Které číslo má za druhou mocninu číslo 400?
Hledaném číslo je číslo 20.

Míra předělá záhon na čtverec o straně 20 m.

Shrnutí: Druhá mocnina podílu je rovna podílu druhých mocnin.