

## 2.8.2 Druhá mocnina III

**Předpoklady:** 020802

**Pedagogická poznámka:** První tabulka je opakovací, druhá obsahuje „nové“ problémy.

**Př. 1:** Dopln tabulku druhých mocnin (bez kalkulačky).

$x$	30	-9	0,7	110	0,12		-0,04
$x^2$						16	

$x$	30	-9	0,7	110	0,12	4	-0,04
$x^2$	900	81	0,49	12100	0,0144	16	0,0016

**Př. 2:** Dopln tabulku druhých mocnin (bez kalkulačky).

$x$	-13	15	1,1	0,015	$\frac{1}{2}$	$2a$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$3a$	$-0,5a$	
$x^2$							0,09					-25

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(2a)^2 = 2a \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a = 4a^2$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$(3a)^2 = 3a \cdot 3a = 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 9a^2$$

$$(-0,5a)^2 = (-0,5a) \cdot (-0,5a) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot a \cdot a = 0,25a^2$$

$x$	-13	15	1,1	0,015	$\frac{1}{2}$	$2a$	0,3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$3a$	$-0,5a$	nejde
$x^2$	169	225	1,21	0,000225	$\frac{1}{4}$	$4a^2$	0,09	$\frac{9}{25}$	$\frac{4}{9}$	$9a^2$	$0,25a^2$	-25

Do posledního sloupce nemáme co doplnit, protože nemáme žádné číslo, které má zápornou druhou mocninu.

**Pedagogická poznámka:** Druhou tabulku zkontrolujeme ve chvíli, kdy mají studenti vyplněnou polovinu, poté mají ještě čas si opravit zbytek. Největší problémy jsou druhou mocninou výrazu  $2a$ , poslední řádek mají většinou všichni dobře. Zmínku o komplexních číslech příliš nedoporučuji. Většina chyb žákům dojde, pouze výrazy s neznámou je třeba řešit na tabuli. Někteří žáci si u zlomků pomohou desetinnými čísly (u jedné poloviny to je docela snadné), je třeba je pochválit za nalezení cesty, ale zároveň vyzvat k tomu, aby se pokusili najít řešení přímo ve zlomcích (další příklady již nejdou převést tak jednoduše).

Některé problémy s rovností  $(2a)^2 = 4a^2$  vyplývají z toho, že si studenti

neuvědomují priority operací (přednost umocňování před násobením) a výraz  $4a^2$

chápu jako  $4a \cdot 4a$  (z tohoto důvodu byly změněny úvodní hodiny, ale zatím není jasné, jaký to bude mít důsledek na tento problém).

**Př. 3:** Doplň větu a zapiš ji vzorcem: "Druhá mocnina podílu je rovna ....". Napiš konkrétní dosazení do vzorce.

Podíl odpovídá zlomku  $\Rightarrow$  několik sloupců předchozí tabulky  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ .

Zkoušíme zapsat obecně pomocí písmen:  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$ .

Vzorec  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$  vyjadřujeme slovy:

- levá strana: druhá mocnina (tu děláme nakonec) z podílu (zlomku  $\frac{a}{b}$ ),
- pravá strana: podíl (zlomek) druhých mocnin (ve zlomku jsou  $a^2$  a  $b^2$ )

**Druhá mocnina podílu je rovna podílu druhých mocnin.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je pro žáky v podstatě neřešitelný. Jsou schopni doplnit vzorec, ale slovní vyjádření je pro ně obtížné (bez napsaného vzorce neřešitelné).

**Př. 4:** Která kladná čísla jsou menší než jejich druhá mocnina?

Postřehy z tabulky, několik dalších výpočtů:

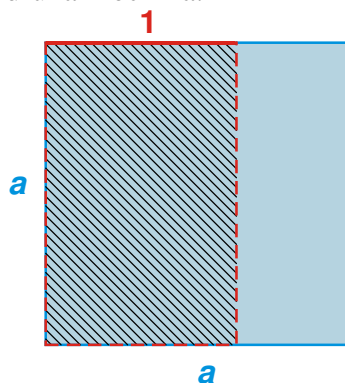
$x$	3	15	1,1	0,015	0,7	0,9
$x^2$	9	225	1,21	0,000225	0,49	0,81

Zdá se, že čísla větší než 1 jsou menší než jejich druhá mocnina (umocňováním na druhou „se zvětšují“, protože násobení číslem větším než 1 „zvětšuje výsledek“).

**Čísla větší než 1 jsou menší než jejich druhá mocnina.**

Předchozí větu si můžeme dokázat geometricky.

**Př. 5:** Vysvětli, jak následující obrázek dokazuje, že čísla větší než 1 jsou menší než jejich druhá mocnina.



Druhá mocnina  $a^2$  čísla  $a$  odpovídá ploše čtverce o straně  $a$ .

Vyšrafovaný obdélník má plochu  $S = a \cdot 1 = a$  a vidíme, že tato plocha je menší než plocha čtverce  $a^2$ .

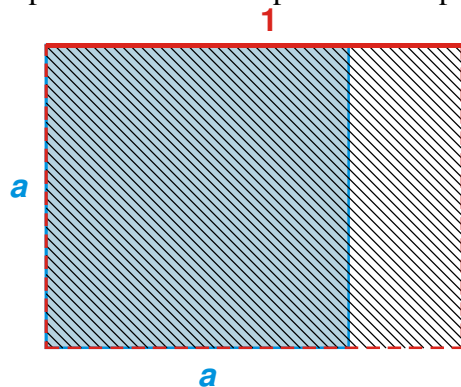
Pokud je délka strany čtverce větší než 1, je modrá plocha ( $a^2$ ) větší než vyšrafovaná plocha ( $a$ )  $\Rightarrow$  platí  $a^2 > a$ .

**Př. 6:** Která kladná čísla jsou větší než jejich druhá mocnina? Dokaž obrázkem (geometricky).

$x$	3	15	1,1	0,015	0,7	0,9
$x^2$	9	225	1,21	0,000225	0,49	0,81

Zdá se, že tuto vlastnost mají čísla menší než 1 („umocňováním se zmenšují“, protože násobení číslem menším než 1 zmenšuje výsledek).

Upravíme obrázek z předchozího příkladu.



Druhá mocnina  $a^2$  čísla  $a$  odpovídá ploše čtverce o straně  $a$ .

Vyšrafovaný obdélník má plochu  $S = a \cdot 1 = a$  a vidíme, že tato plocha je větší než plocha čtverce  $a^2$ .

Pokud je délka strany čtverce menší než 1, je modrá plocha ( $a^2$ ) menší než vyšrafovaná plocha ( $a$ )  $\Rightarrow$  platí  $a^2 < a$ .

**Př. 7:** Která záporná čísla jsou menší než jejich druhá mocnina?

Druhá mocnina všech záporných čísel je kladná a tedy větší  $\Rightarrow$  všechna záporná čísla jsou menší než jejich druhá mocnina.

**Dodatek:** Přesto se záporná čísla se při umocňování chovají podobně jako čísla kladná.

$x$	-3	-15	-1,1	-0,015	-0,7	-0,9
$x^2$	9	225	1,21	0,000225	0,49	0,81

U záporných čísel větších než  $-1$  se absolutní hodnota výsledku (vzdálenost na ose od počátku) zmenšuje, u záporných čísel menších než  $-1$ , se absolutní hodnota výsledku zvětšuje.

**Př. 8:** Míra se vrhnul na pěstování česneku. Připravil si záhon  $10 \times 40$  m. Kolik česneku sklídí, pokud se mu podaří dosáhnout výnosu 8 tun na hektar? Kolik za česnek může utržit na farmářském trhu při ceně 90 Kč za kilogram?

Plocha obdélníku:  $S = ab = 10 \cdot 40 \text{ m}^2 = 400 \text{ m}^2 = 0,04 \text{ ha}$

Hmotnost česneku:  $0,04 \cdot 8 \text{ t} = 0,32 \text{ t} = 320 \text{ kg}$ .

Utržené peníze:  $320 \cdot 90 = 28\,800 \text{ Kč}$

Pokud Míra dosáhne výnosu 8 tun na hektar, vypěstuje 320 kg česneku, za který utrží 28 800 Kč.

**Př. 9:** Po úspěchu v první roce se Míra rozhodl s česnekem pokračovat a zakoupil kultivátor o záběru 4 m. Jak musí upravit rozměry záhonu s česnekem, aby zbytečně nejezdil, zachoval plochu z loňského roku a tvar záhonu měnil co nejméně?

Pokud má Míra využít kultivátor a nejezdit zbytečně, musí být šířka záhonu násobkem 4 m  $\Rightarrow$  hledáme násobky 4 nejbližší 10  $\Rightarrow$  čísla 8 a 12.

- $a = 8, b = \frac{S}{a} = \frac{400}{8} \text{ m} = 50 \text{ m},$
- $a = 12, b = \frac{S}{a} = \frac{400}{12} \text{ m} = 33,3 \text{ m}.$

Míra záhon předělá buď na rozměr  $8 \times 50$  m nebo  $12 \times 33$  m.

**Př. 10:** O Mírových úspěších s česnekem se bohužel dozvěděli kromě zákazníků i zloději a většinu výpěstků sklídili v noci za něj. Proto se Míra v dalším roce rozhodl záhon oplotit. Jaký tvar a jaké rozměry záhonu má zvolit, aby byl obvod záhonu co nejmenší a plocha se nezměnila?

Jak si snadno můžeme ověřit pomocí provázku, největší plochu ohraničíme daným obvodem, pokud nakreslíme čtverec  $\Rightarrow$  hledáme čtverec o ploše  $400 \text{ m}^2$ .

Které číslo má za druhou mocninu číslo 400?

Hledané číslo je číslo 20.

Míra předělá záhon na čtverec o straně 20 m.

**Shrnutí:** Druhá mocnina podílu je rovna podílu druhých mocnin.