

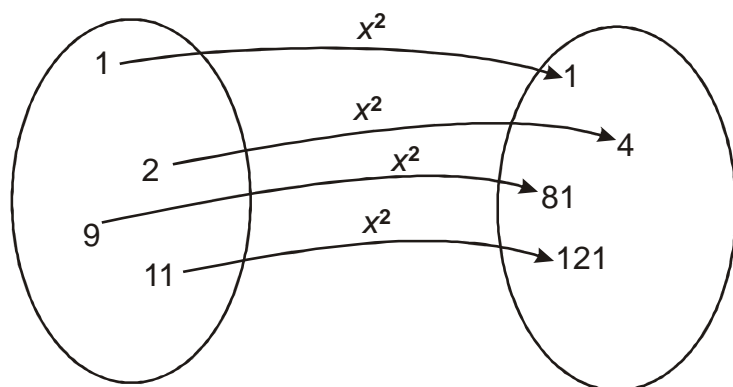
2.8.5 Druhá odmocnina

Předpoklady: 020804

V této hodině jsou kalkulačky zakázány.

Druhá mocnina nám umožňuje určit z délky strany plochu čtverce.

Druhá mocnina



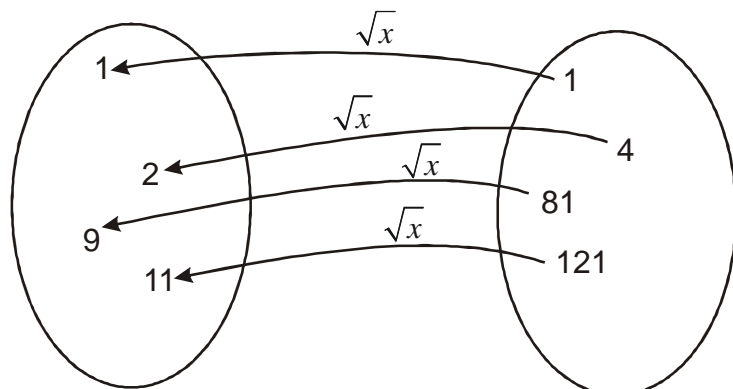
délky stran čtverců

obsahy čtverců

Občas se potřebujeme vydat opačným směrem: Známe plochu čtverce a potřebujeme zjistit délku jeho strany. Jak by se mohla jmenovat tato funkce?

Tato funkce nás vrátí od obsahu k původní délce strany \Rightarrow ruší působení mocniny \Rightarrow označujeme ji jako **(druhou) odmocninu**, značíme \sqrt{x} .

Druhá odmocnina



délky stran čtverců

obsahy čtverců

Př. 1: Vypočti a zdůvodni svůj výsledek.

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt{81}$

c) $\sqrt{1}$

d) $\sqrt{121}$

a) $\sqrt{4} = 2$, protože $2^2 = 4$

b) $\sqrt{81} = 9$, protože $9^2 = 81$

c) $\sqrt{1} = 1$, protože $1^2 = 1$

d) $\sqrt{121} = 11$, protože $11^2 = 121$

Pedagogická poznámka: V následujících příkladech už netrvám na to, aby si žáci psali kontrolu pomocí druhé mocniny. Pokud někdo udělá chybu, kontrolu si nějakou dobu psát musí.

Př. 2: Vypočti.

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{100}$ c) $\sqrt{0,09}$ d) $\sqrt{4900}$

a) $\sqrt{25} = 5$, protože $5^2 = 25$

b) $\sqrt{100} = 10$, protože $10^2 = 100$

c) $\sqrt{0,09} = 0,3$, protože $0,3^2 = 0,09$

d) $\sqrt{4900} = 70$, protože $70^2 = 4900$

Př. 3: Doplň tabulku.

x	0,16	64	10000	0,0004	2500	$\frac{4}{9}$	0,0121		-4	2
\sqrt{x}								0,3		

x	0,16	64	10000	0,0004	2500	$\frac{4}{9}$	0,0121	0,09	-4	2
\sqrt{x}	0,4	8	100	0,02	50	$\frac{2}{3}$	0,11	0,3	nejde	jde, ale nevíme

Druhou odmocninu k číslu -4 najít nemůžeme, protože druhé mocniny všech čísel jsou čísla nezáporná.

Pedagogická poznámka: Při vyplňování prvních sloupců se neobjevují žádné nejasnosti.

První problémy nastávají u zlomku, kde stačí ujistit, že odmocnina existuje. Další chyby jsou u čísla 0,0121, kde se objevuje příliš mnoho desetinných míst. U čísla -4 se žáci shodnou, že odmocnina neexistuje, většinový názor pak zaujme stejné stanovisko k poslednímu sloupci (většinou se zdůvodněním, že $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ a dvojka je mezi tím).

V hodině řešíme poslední sloupec až po příkladu 4.

Př. 4: Olda učitelům moc nevěří, a proto se hned ptá: "Proč neplatí, že $\sqrt{25} = -5$, když $(-5)^2 = 25$ "? Jak to je?

Olda má pravdu, podle všeho, co jsme si dosud říkali, bychom mohli psát i $\sqrt{25} = -5$.

V matematice však nikdy nepíšeme $\sqrt{25} = -5$, ze dvou základních důvodů:

- vždy se snažíme o jednoznačné výsledky (aby se všichni shodli na správném výsledku) \Rightarrow jednu ze dvou možností zakážeme (raději tu zápornou, abychom se nemuseli starat o znaménka, navíc dluhy stejně nikdo nemá rád),
- druhou odmocninu jsme v geometrii brali jako délku strany čtverce a ta nemůže být záporná,

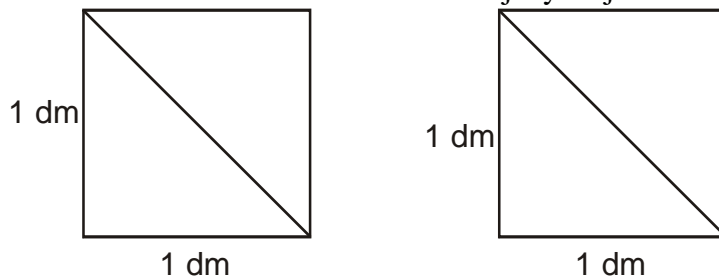
⇒ ze dvou čísel, jejichž druhá mocnina se rovná 25, bereme za druhou odmocninu pouze kladné číslo 5.

Druhá odmocnina je vždy nezáporné číslo.

Druhá odmocnina ze dvou $\sqrt{2}$ existuje pokud existuje čtverec o obsahu 2. Zkusíme takový najít.

Poznámka: Ve třídě používám čtverce o straně 1 dm. V učebnici jsou čtverce menší, kvůli lepšímu využití stránky.

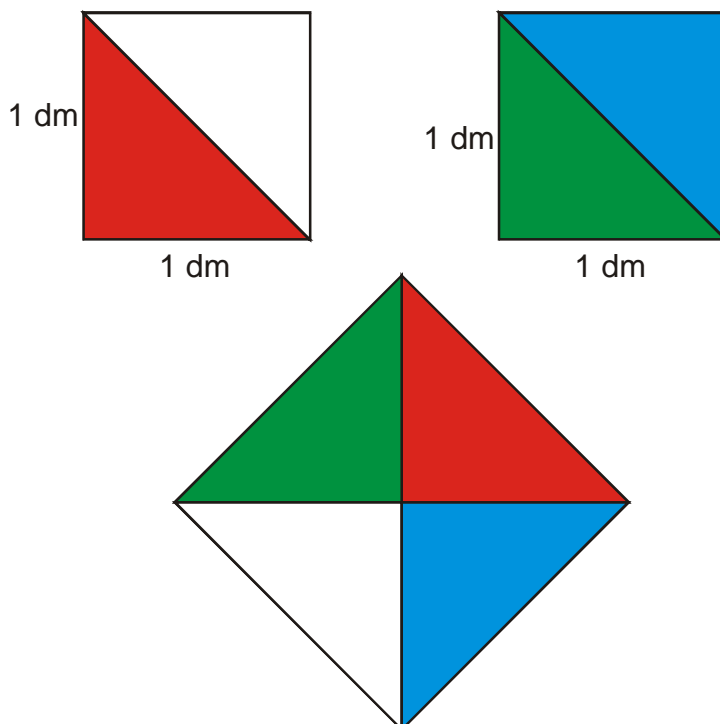
Př. 5: Máme dva čtverce o straně 1 dm. Urči jaký mají dohromady obsah.



Obsah každého čtverce je $1 \text{ dm}^2 \Rightarrow$ čtverce mají dohromady obsah 2 dm^2 .

Př. 6: Vytvoř pomocí čtverců z předchozího příkladu jeden čtverec o obsahu 2 dm^2 .

Rozstříhneme oba čtverce po úhlopříčce a ze čtyř vzniklých kousků sestavíme nový větší čtverec. Jeho obsah se rovná součtu obsahů obou čtverců a je tedy roven 2 dm^2 .



Pedagogická poznámka: Pokud v hodině nikoho řešení nenapadne. Ukážu již rozstříhané čtverce a vyzvu je, aby se pokusili požadovaný čtverec sestavit.

Př. 7: Zjisti pomocí čtverce z předchozího příkladu hodnotu $\sqrt{2}$.

Strana čtverce s obsahem 4 má délku $2 = \sqrt{4} \Rightarrow$ strana sestaveného čtverce o obsahu 2 má délku $\sqrt{2} \Rightarrow$ změříme stranu sestaveného čtverce a budeme znát hodnotu $\sqrt{2}$.

Měřením zjistíme, že $\sqrt{2} = 1,42$.

Př. 8: Zkontroluj správnost hodnoty $\sqrt{2} = 1,42$.

Pokud je hodnota správná musí platit $1,42^2 = 2$.

$$\begin{array}{r} 1,42 \\ \cdot 1,42 \\ \hline 284 \\ 568 \\ 142 \\ \hline 2,0164 \end{array}$$

Nevyšla přesně 2, ale to není příliš překvapivé, měření nebývají dokonale přesná.

Př. 9: Testuj na kalkulačce postupně se zpřesňující hodnoty $\sqrt{2}$ a sleduj, jak se mění výsledky umocňování.

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$$

Postupně umocňujeme:

- $1,4^2 = 1,96$,
- $1,41^2 = 1,9881$,
- $1,414^2 = 1,999396$,
- $1,4142^2 = 1,99996164$,
- $1,41421^2 = 1,999989924$,
- $1,414213^2 = 1,999998409$,
- $1,4142135^2 = 1,999999824$,
- $1,41421356^2 = 1,999999993$,
- $1,414213562^2 = 1,999999999$,
- $1,4142135623^2 = 1,999999999$,
- ...

Další počítání je zřejmě již nad síly normálních kalkulaček.

Př. 10: Určování přesných hodnot odmocnin je bez výpočetní techniky velmi náročné. Proto se často používají přibližné odhady - například $1 < \sqrt{3} < 2$. Vysvětli, proč tato nerovnost platí. Napiš podobné nerovnosti pro následující odmocniny.

a) $\sqrt{7}$

b) $\sqrt{15}$

c) $\sqrt{40}$

d) $\sqrt{95}$

$1 < \sqrt{3} < 2$, protože $1 = 1^2 < 3 < 2^2 = 4$.

a) $2 < \sqrt{7} < 3$, protože $4 = 2^2 < 7 < 3^2 = 9$.

- b) $3 < \sqrt{15} < 4$, protože $9 = 3^2 < 15 < 4^2 = 16$.
 c) $6 < \sqrt{40} < 7$, protože $36 = 6^2 < 40 < 7^2 = 49$.
 d) $9 < \sqrt{95} < 10$, protože $81 = 9^2 < 95 < 10^2 = 100$.

Př. 11: Hodnotu $\sqrt{2}$ lze určit na libovolný počet desetinných míst například tímto postupem.

Víme, že $\sqrt{2}$ je takové číslo, pro něž platí $(\sqrt{2})^2 = 2$. Dále víme, že $1^2 = 1$ a $2^2 = 4$.

Protože $1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$ musí být $1 < \sqrt{2} < 2$. Zjistili jsme tedy, že hodnota $\sqrt{2}$ leží mezi čísly 1 a 2. Náš odhad můžeme dále zlepšovat. Po výpočtu druhých mocnin čísel 1,1; 1,2 až 1,9 zjistíme, že $1,4^2 = 1,96$ a $1,5^2 = 2,25$. Stejně jako v předchozím případě platí $1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2$ a proto $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Tím se nám podařilo zpřesnit odhad o jeden řád. Tímto způsobem můžeme postupovat libovolně dlouho a získat tak libovolně přesný odhad $\sqrt{2}$.

Urči hodnotu $\sqrt{6}$ zaokrouhlenou na dvě desetinná místa. Hledej vylepšení uvedeného postupu tak, abys bez snížení přesnosti našel požadovaný výsledek v co nejkratším čase.

Správná hodnota $\sqrt{6}$ zaokrouhlená na dvě desetinná místa je $\sqrt{6} \doteq 2.45$.

- $2^2 = 4 < 6 < 9 = 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{6} < 3$,
- $2,4^2 = 5,76 < 6 < 6,25 = 2,5^2 \Rightarrow 2,4 < \sqrt{6} < 2,5$,
- $2,44^2 = 5,9536 < 6 < 6,0025 = 2,45^2 \Rightarrow 2,44 < \sqrt{6} < 2,45$,
- $2,449^2 = 5,9997601 < 6 < 6,0025 = 2,450^2 \Rightarrow 2,449 < \sqrt{6} < 2,450 \Rightarrow \sqrt{6} \doteq 2.45$.

Některá zlepšení postupu:

1. **Zastavení iterace** - Ve chvíli, kdy najdeme číslo jehož druhá mocnina je větší než 6, zastavíme umocňování dalších čísel. (Například při výpočtu nerovnosti $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$ nemá cenu zjišťovat druhou mocninu čísel 2,6 až 2,9).

2. **Půlení intervalů** - Máme zpřesňovat nerovnost $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$. Spočteme hodnotu $2,45^2 = 6,0025$. Vidíme, že není nutné počítat mocniny čísel větších než 2,45 (takto vždy vyřadíme po prvním umocňování polovinu možných čísel a navíc nám spočtená hodnota umožňuje odhad dalšího čísla, které budeme mocnit – v tomto případě zřejmě 2,44. Můžeme tak zpřesnit odhad o jeden řád již po dvou výpočtech, v průměrném případě po třech, v nejhorším po čtyřech)

3. **Určení poslední platné číslice** – Máme-li nerovnost $2,44 < \sqrt{6} < 2,45$, můžeme rozhodnout zda poslední číslicí bude 4 nebo 5 výpočtem $2,445^2 = 5,978025$. Z tohoto výsledku plyne, že $\sqrt{6} > 2,445$ a námi hledaná hodnota musí být 2,45 (již hodnota 2,445 by se zaokrouhlovala nahoru).

Dodatek: Není zcela od věci předvést rychlost počítačů výpočtem $\sqrt{2}$ například pomocí programu y-cruncher (50 000 míst v čase pod desetinu sekundy).

Hodnota $\sqrt{2}$ na 10 000 desetinných míst

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846
 210703885038753432764157273501384623091229702492483605585073721264412149709

993583141322266592750559275579995050115278206057147010955997160597027453459
686201472851741864088919860955232923048430871432145083976260362799525140798
968725339654633180882964062061525835239505474575028775996172983557522033753
185701135437460340849884716038689997069900481503054402779031645424782306849
293691862158057846311159666871301301561856898723723528850926486124949771542
183342042856860601468247207714358548741556570696776537202264854470158588016
207584749226572260020855844665214583988939443709265918003113882464681570826
301005948587040031864803421948972782906410450726368813137398552561173220402
450912277002269411275736272804957381089675040183698683684507257993647290607
629969413804756548237289971803268024744206292691248590521810044598421505911
202494413417285314781058036033710773091828693147101711116839165817268894197
587165821521282295184884720896946338628915628827659526351405422676532396946
175112916024087155101351504553812875600526314680171274026539694702403005174
953188629256313851881634780015693691768818523786840522878376293892143006558
695686859645951555016447245098368960368873231143894155766510408839142923381
132060524336294853170499157717562285497414389991880217624309652065642118273
167262575395947172559346372386322614827426222086711558395999265211762526989
17540988159348640083457085181472231814204070426509056532333984364578657967
965192672923998753666172159825788602633636178274959942194037777536814262177
387991945513972312740668983299898953867288228563786977496625199665835257761
989393228453447356947949629521688914854925389047558288345260965240965428893
945386466257449275563819644103169798330618520193793849400571563337205480685
405758679996701213722394758214263065851322174088323829472876173936474678374
319600015921888073478576172522118674904249773669292073110963697216089337086
611567345853348332952546758516447107578486024636008344491148185876555542864
551233142199263113325179706084365597043528564100879185007603610091594656706
768836055717400767569050961367194013249356052401859991050621081635977264313
806054670102935699710424251057817495310572559349844511269227803449135066375
687477602831628296055324224269575345290288387684464291732827708883180870253
398523381227499908123718925407264753678503048215918018861671089728692292011
975998807038185433325364602110822992792930728717807998880991767417741089830
608003263118164279882311715436386966170299993416161487868601804550555398691
311518601038637532500455818604480407502411951843056745336836136745973744239
885532851793089603738989151731958741344288178421250219169518755934443873961
893145499999061075870490902608835176362247497578588583680374579311573398020
999866221869499225959132764236194105921003280261498745665996888740679561673
918595728886424734635858868644968223860069833526427990562831656139139425576
490620651860216472630333629750756978706066068564981600927187092921531323682
813569889370974165044745909605374727965244770940992412387106144705439867436
473384774548191008728862221495895295911878921491798339810837882781530655623
158103606486758730360145022732088293513413872276841766784369052942869849083
845574457940959862607424995491680285307739893829603621335398753205091998936
075139064444957684569934712763645071632791547015977335486389394232572775400
382602747856741725809514163071595978498180094435603793909855901682721540345
815815210049366629534488271072923966023216382382666126268305025727811694510
353793715688233659322978231929860646797898640920856095581426143636310046155
943325504744939759339991254195323009321753044765339647066276116617535187546
462096763455873861648801988484974792640450654448969100407942118169257968575
637848814989864168549949163576144840470210339892153423770372333531156459443
897036531667219490493518829058063074013468626416724701106534634939164071462

855679801779338144240452691370666097776387848662380033923243704741153318725
319060191659964553811578884138084332321053376746181217801429609283241136275
254088737290512940733947943306194395693670207942951587822834932193166641113
015495946983789776743444353933770995713498840789085081589236607008865810547
094979046572298888089246128281601313370102908029099974564784958154561464871
551639050241985790613109345878330620026220737247167668545549990499408571080
992575992889323661543827195500578162513303815314657790792686850080698442847
915242427544102680575632156532206188575122511306393702536292716196825125919
202521605870118959673224423926742373449076464672737534796459881914980793171
800242385545388603836831080077918246646275411744425001872777951816438345146
346129902076334301796855438563166772351838933666704222211093914493028796381
283988931173130843004212555018549850652945563776603146125590910461138476828
235959247722862904264273616326458544339287726386034314980489639736332975488
592568114929683612672589857383321643666348702347730261010613050729861153412
994880877447311122954265275165366591173014236062652586907719821703709810464
436047722673928298741525930695620638471082740821849067372330587430297092428
994817392440786937528440104439904852087885191419354151290068173517030693869
705900474251576552480784473621441050162008454441222559562029847259403528019
067980680983003964539856859304586252606377974535599277472990648887454512424
960763780108639001910580928747647207511092386059501954322816020887962151623
385216128752285180252928761832570371728574067639449098254644221846543088066
105802015847284067126302545937989065081685713716566859413005331970365964033
766741461049563765103083661348931094780268129355733189055197052018451503996
909866315251241161119259405528085649893195898345623319836834948808061715624
391128663127978483719789533690152776005498055166350197855571101405552976338
412750446860464766318326611651820675012047669910987219104447440326894364159
594279219944235537187042995592403140917128481585438660053857135836398163094
524075570093251682434416824083619792733728252154622469615332170268299509790
890345948588783494396162043584224973971871139589273050921970549171769616004
455808994278788803691694328945951472267229261248506961731638094108218600452
861026965475763043102560271523139694821355198214097165490973199928349256740
974903922971263486934145749331980417180761119639022786640759224341677624662
362389131102703433045763681411283213263085822394562195980866129399962012341
561763181743124200890149838485604808798646083935964923665142968125773143229
145687168276219961182782695315749838026246517590541039761812876042163861345
022132627277566124411336107751955577495086563606737866506231856406991228018
757417854946612532759976979605977605907564891066610158384172028185304321190
446577525542775437987260548817361982675816862832952607899322266836028385135
122810593185910286415081570563197173151831362502435904146321223921766339826
893682531505300598915470290953719326620734112349474336788469020139049784285
216341442921458955828784766939464642678122190497856363552633682780518600986
992489377860023987691698076566219438985443708059464333623338105874581623547
560013659243524265714308346554576800237081467573252547025507476374716350678
515991736937932510326827606286459146182047214863703707719269268236233347203
792459646918105261391530862802914409654825638730927304265446629290458960637
519187114693453619733247895727070315309309019211991999936157650035039840540
674253879275279227247335667706078379113844889362613676570602636003151329520
953952028548973844862561349244147086070866026763499787934208758361219471169
942238484825959143045281070626015089691353030177200627170544020906695149152
745977197059476954740952102878725578568800221937177435581107939308833845586

482772910086295545661413067212308487402271210586863233882374138844289381554
446471057556514684357029466350628938735698686883764803265195284146535173953
027361201374203009867398385143219004360289826982935293994141292305803845650
227072168151619410114498263013649008770483984883860906533685990545838952031
856480414932721423908651649994316592079659535694307231129116292867975171566
889054393220356912933245702080671944404973049439814082278296027994245410831
666759214248351827238172050410392742888015562233807961475124335147310212845
459448994449960007524375195701166834174474907958820995178367680232365176749
723014874577427259947609621984327148352986111902728735849052179759083741974
860267060537462315300393752123678677528486921958571375542696848278363178611
099336801439159059748428580545161302301439790570161088986277796107506733326
760486549292513997813905358822768937322049414839401355603565604421401761206
051318068919899626061848318534018362378217266375804552471962661749254228528
045714420485783421132280085287042054889923412785548123676153770710425446986
852199112283542663499971274836607624624182073646661712839474847328047443040
334410720042872712756702795675824292627194545805300266648996507956977817862
194217200523716536946770419511191270462483605113028904643775114869488784961
511884147191000125588383666067720841123515355881126778957155859041257626160
106751315358021242733187100063582495450409957940725479890031682651237311905
566829151943053708489307869197428290490386037231160992834243171222509945471
501928666487871079519951800546338838443154817246354802445180308452734310006
213710346257330600123497374435581809656784646415339051465691932456235314057
791936989884236471835253758052577133112007971040683154926654020260468068183
914378272147690632424695171286367384431398333711761594186999346626234537345
235679401241680922911636095637216745283917099091466485073920515160560473787
106154702169960746569309794426121469256159342564940191229895147325447151812
632583688972822628332952403597007278633646045947071241747294687757059581573
499628480995678392554742404489918870710696752425077452012293608105741426532
347240641621410333533405511045212617503590284037454591864504727624342071770
929793540102140964645028368341804075860810014072161924771798098596811154044
644372856895928683197779778693464159846974513391774153790487788083002205833
50467465553230285873258351

Shrnutí: Obrácenou (inverzní) operací k druhé mocnině je druhá odmocnina (z obsahu určí délku strany).