

2.8.8 Výpočty s odmocninami II

Předpoklady: 020807

Př. 1: Vypočti. Odmocniny, které nejdou počítat „z hlavy“ usměrni.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ b) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{32}$

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$ b) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9$

c) $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ d) $\sqrt{32} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$

Př. 2: Vypočti (všechny body mají "hezké" řešení).

a) $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}$ b) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{24}}$

a) $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ b) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ (jinak $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$)

e) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{54}{24}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 9}{6 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ (jinak $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 9}}{\sqrt{6 \cdot 4}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$)

Př. 3: Dopln vzorec $\sqrt{\frac{a}{b}}$ a přečti jej.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad a \geq 0; b > 0$$

- Levá strana: odmocnina, kterou děláme z čísla, které získáme jako podíl \Rightarrow odmocnina podílu.
- Pravá strana: podíl dvou čísel, obě čísla jsou odmocniny \Rightarrow podíl odmocnin.

Odmocnina podílu se rovná podílu odmocnin.

Př. 4: Hugvenc navrhl další vzorce pro odmocniny: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ a $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Zkusíme, zda vzorce platí při dosazení konkrétních čísel.

$a = 1, b = 3$:

- $\sqrt{a+b} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{1} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$

\Rightarrow vzorec neplatí (na obou stranách nevyšla stejná čísla).

$a = 25, b = 16:$

- $\sqrt{a-b} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$

\Rightarrow vzorec neplatí (na obou stranách nevyšla stejná čísla).

Pedagogická poznámka: U prvního vzorce je elegantnější $a = 16$ a $b = 9$, je však poměrně vzácné, když s ním někdo přijde.

Pedagogická poznámka: Následující příklad mohou řešit pouze žáci s normální kalkulačkou (případně žáci, kteří mají kalkulačku na mobilu, ale nebudou si měnit nastavení počtu platných číslic na display).

Př. 5: Vypočti s pomocí kalkulačky (ne kalkulačky mobilu) co nejpřesněji.

a) $\sqrt{0,07}$ b) $\sqrt{0,00054}$ c) $\sqrt{0,00008}$

a) $\sqrt{0,07}$

Klasický výpočet: $\sqrt{0,07} \doteq 0,264575131$ (více číslic kalkulačka neukáže, protože se nevejdou na display).

Nápad: $\sqrt{0,07} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{0,01}$. Hodnotu $\sqrt{7}$ určí kalkulačka přesněji (nebude plýtvat jedno desetinné místo na nulu, kterou si můžeme přidat sami).

$\sqrt{0,07} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{0,01} \doteq 2,645751311 \cdot 0,1 = 0,2645751311 \Rightarrow$ zpřesnili jsme výpočet o jeden řád.

b) $\sqrt{0,00054}$

Klasický výpočet: $\sqrt{0,00054} \doteq 0,0232379$ (překvapivě ještě méně míst než 10).

$\sqrt{0,00054} = \sqrt{5,4} \cdot \sqrt{0,0001} \doteq 2,323790008 \cdot 0,01 = 0,02323790008 \Rightarrow$ zpřesnili jsme výpočet o čtyři řády (teď už víme, proč toho kalkulačka ukázala tak málo, zbytek čísla byly nuly).

c) $\sqrt{0,00008}$

Klasický výpočet: $\sqrt{0,00008} \doteq 0,008944271$.

$\sqrt{0,00008} = \sqrt{80} \cdot \sqrt{0,000001} \doteq 8,94427191 \cdot 0,001 = 0,00894427191$.

Pedagogická poznámka: Hledání odmocnin v tabulkách máme v ŠVP, takže ho učit musím. Navíc mě přijde i užitečné – upevňuje v žácích cit pro inverzi mocniny a odmocniny, zlepšuje orientaci a zkušenost se samostatným pochopením tabulky se může hodit (žáci vyšších ročníků často nejsou schopni se orientovat ani v daleko přehlednějších tabulkách). Hledání v tabulce navíc provádíme jako skupinovou práci.

V této hodině dostávají žáci celé tabulky, v další hodině pak rozdám okopírovanou dvojstránku, kterou si mohou nechat (a musí si na ni dávat pozor, kvůli použití v písemce).

Na zbytek hodiny je třeba minimálně 20 lépe však 25 minut.

Pedagogická poznámka: Nevysvětluji žákům, jak mají mocniny hledat. Jediné udílené rady: na začátku: najděte si mocniny čísel, které znáte (2; 5; 1,1; ...), u třetí platné číslice: spočtete si mocninu (například $1,23^2$) na kalkulačce a koukejte, kde v tabulkách je výsledek, rozmyslete si, jakou část tabulky jste využívali a kolik má tabulka částí, u čtvrté platné číslice: kde v tabulce najdete hodnoty, se kterými se pracuje v ukázce.

Př. 6: Najdi v tabulkách tabulku pro vyhledávání druhých mocnin a odmocnin.

Tabulka druhé mocniny a odmocniny se podle obsahu nachází na stránkách 66-67.

Př. 7: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj na kalkulačce.

a) $2,8^2$ b) 35^2 c) 710^2 d) $0,57^2$ e) $0,093^2$

a) $2,8^2 = 7,840$ (řádek 2,8; sloupec 0)

b) 35^2

Tabulka obsahuje mocniny pouze pro čísla menší nebo rovna 10 \Rightarrow rozdělíme si

$$35^2 = 3,5^2 \cdot 10^2.$$

$$3,5^2 = 12,25 \text{ (řádek 3,5; sloupec 0)}$$

$$35^2 = 3,5^2 \cdot 10^2 = 12,25 \cdot 100 = 1225$$

c) 710^2

$$7,1^2 = 50,41 \text{ (řádek 7,1; sloupec 0)}$$

$$710^2 = 7,1^2 \cdot 100^2 = 50,41 \cdot 10000 = 504100$$

d) $0,57^2$

$$5,7^2 = 32,49 \text{ (řádek 5,7; sloupec 0)}$$

$$0,57^2 = 5,7^2 \cdot 0,1^2 = 32,49 \cdot 0,01 = 0,3249$$

e) $0,093^2$

$$9,3^2 = 86,49 \text{ (řádek 9,3; sloupec 0)}$$

$$0,093^2 = 9,3^2 \cdot 0,01^2 = 86,49 \cdot 0,0001 = 0,008649$$

Př. 8: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj na kalkulačce, ale udávej je s přesností zapsanou v tabulce.

a) $1,23^2$ b) $23,4^2$ c) 447^2 d) $0,728^2$ e) $0,0809^2$

a) $1,23^2 \doteq 1,513$ (řádek 1,2; sloupec 3, výsledek je pouze přibližný $1,23^2 = 1,5129$)

b) $23,4^2$

$$2,34^2 \doteq 5,476 \text{ (řádek 2,3; sloupec 4)}$$

$$23,4^2 = 2,34^2 \cdot 10^2 \doteq 5,476 \cdot 100 = 547,6$$

c) 447^2

$4,47^2 \doteq 19,98$ (řádek 4,4; sloupec 7)

$447^2 = 4,47^2 \cdot 100^2 \doteq 19,98 \cdot 10000 = 199\,800$

d) $0,728^2$

$7,28^2 \doteq 53,00$ (řádek 7,2; sloupec 8)

$0,728^2 = 7,28^2 \cdot 0,1^2 \doteq 53,00 \cdot 0,01 = 0,5300$

e) $0,0809^2$

$8,09^2 \doteq 64,45$ (řádek 8,0; sloupec 9)

$0,0809^2 = 8,09^2 \cdot 0,01^2 \doteq 64,45 \cdot 0,0001 = 0,006445$

Př. 9: Urči pomocí tabulky co nejpřesněji (s využitím všech míst). Výsledky kontroluj na kalkulačce, ale udávej je s přesností zapsanou v tabulce.

a) $1,125^2$

b) $37,22^2$

c) $0,7183^2$

d) 6235^2

e) $0,02993^2$

Vysvětlení oprav v tabulkách:

$$\begin{array}{r} 2,246^2 \doteq \quad 5,018 \quad \dots \text{ řádek 2,2; sloupec 4} \\ \quad \quad \quad + \quad 27 \quad \dots \text{ sloupec 6 oprav} \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 5,045 \end{array}$$

$1,125^2 \doteq 1,254 \dots$ řádek 1,1, sloupec 2

a) $\begin{array}{r} 11 \dots \text{ sloupec 5 oprav} \\ \hline 1,265 \end{array}$

$3,722^2 \doteq 13,84 \dots$ řádek 3,7, sloupec 2

b) $\begin{array}{r} 2 \dots \text{ sloupec 2 oprav} \\ \hline 13,86 \end{array}$

$37,22^2 = 3,722^2 \cdot 10^2 \doteq 13,86 \cdot 100 = 1386$

$7,183^2 \doteq 51,55 \dots$ řádek 7,1, sloupec 8

c) $\begin{array}{r} 4 \dots \text{ sloupec 3 oprav} \\ \hline 51,59 \end{array}$

$0,7183^2 = 7,183^2 \cdot 0,1^2 \doteq 51,59 \cdot 0,01 = 0,5159$

$6,235^2 \doteq 38,81 \dots$ řádek 6,2, sloupec 3

d) $\begin{array}{r} 6 \dots \text{ sloupec 5 oprav} \\ \hline 38,87 \end{array}$

$6235^2 = 6,235^2 \cdot 1000^2 \doteq 38,87 \cdot 1\,000\,000 = 38\,870\,000$

$2,993^2 \doteq 8,940 \dots$ řádek 8,9, sloupec 9

e) $\begin{array}{r} 18 \dots \text{ sloupec 3 oprav} \\ \hline 8,958 \end{array}$

$$0,02993^2 = 2,993^2 \cdot 0,01^2 \doteq 8,958 \cdot 0,0001 = 0,0008958$$

Př. 10: Sepiš pod tabulku návod, jak s její pomocí určit druhou mocninu. Návod sestavte společně za celou skupinu.

1. Upravíme si číslo pomocí součinu s mocninou deseti tak, abychom získali číslo větší nebo rovno 1 a menší nebo rovno než 10.
2. Najdeme v tabulce hodnotu druhém mocniny (první dvě číslice udávají řádek, třetí číslice sloupec, čtvrtá číslice udává opravu, kterou přičítáme k nejnižším řádům čísla nalezeného v tabulce).
3. Vynásobíme nalezené číslo umocněnou mocninou deseti.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je procvičování na doma, pro žáky s problémy. Obsahuje nezbytné minimum pro hledání odmocnin v následující hodině.

Př. 11: Urči mocniny pomocí tabulky. Výsledky kontroluj pomocí kalkulačky.

a) $4,2^2$ b) $0,081^2$ c) 193^2 d) $0,333^2$ e) $0,0207^2$

a) $4,2^2$

$$4,2^2 = 17,64 \text{ (řádek 4,2; sloupec 0)}$$

b) $0,081^2$

$$8,1^2 = 65,61 \text{ (řádek 8,1; sloupec 0)}$$

$$0,081^2 = 8,1^2 \cdot 0,01^2 \doteq 65,61 \cdot 0,0001 = 0,006561$$

c) 193^2

$$1,93^2 \doteq 3,725 \text{ (řádek 1,9; sloupec 3)}$$

d) $0,333^2$

$$3,33^2 \doteq 11,09 \text{ (řádek 3,3; sloupec 3)}$$

$$0,333^2 = 3,33^2 \cdot 0,1^2 \doteq 11,09 \cdot 0,01 = 0,1109$$

e) $0,0207^2$

$$2,07^2 \doteq 4,285 \text{ (řádek 2,0; sloupec 7)}$$

$$0,0207^2 = 2,07^2 \cdot 0,01^2 \doteq 4,285 \cdot 0,0001 = 0,0004285$$

Shrnutí: Ukázku pro hledání v tabulkách pochopíme, když v tabulce najdeme všechna čísla, která v ukázce vystupují.