

2.8.9 Výpočty s odmocninami III

Předpoklady: 020801

Př. 1: Vypočti. Odmocniny, které nejdou počítat „z hlavy“ usměrni.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ b) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{32}$

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$

b) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9$

c) $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{32} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$

Př. 2: Spočítej: a) $\sqrt{4^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $(\sqrt{5})^2$ d) $(\sqrt{-4})^2$.

a) $\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$ Výsledek byl jasný i bez výpočtu, druhá odmocnina vyruší předchozí druhou mocninu (druhá odmocnina nás vrátí od obsahu zpět k délce strany).

b) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

c) $(\sqrt{5})^2 = 5$ Druhá odmocnina z pěti je kladné číslo, jehož druhá mocnina je 5. Protože přesně to s výsledkem odmocniny děláme (dáváme odmocninu na druhou), získáme číslo 5.

d) $(\sqrt{-4})^2$ Nejde spočítat, protože nemůžeme udělat odmocninu ze záporného čísla.

Př. 3: Rozhodni, zda platí: a) $(\sqrt{a})^2 = a$ b) $\sqrt{a^2} = a$

a) $(\sqrt{a})^2 = a$ Platí, pokud je a nezáporné číslo (druhá odmocnina z a je číslo, jehož druhá mocnina je číslo a).

b) $\sqrt{a^2} = a$ Neplatí. V předchozím příkladu vyšlo $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$ vzorec platí pouze pro kladná čísla (záporná čísla ztratí při umocnění znaménko a odmocnina jim ho již zpátky nevrátí. V předchozím bodě to nevadilo, protože odmocnina je nezáporná a nemůže přijít umocněním o znaménko).

Platí: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ a $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$ pro navzájem opačná čísla vychází stejná hodnota.

Takovou funkci už jsme měli a říkali jsme jí absolutní hodnota $\Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$.

Pedagogická poznámka: Velká většina žáků samozřejmě prohlásí, že obě rovnosti jsou v pořádku. Neupozorňuji na chybu, ale na to, že si měli něčeho všimnout už v předchozím příkladu. Jde o to, aby se žáci naučili vnímat překvapivé výsledky a dělat z nich závěry (doplňovat vlastní představu o problematice).

Př. 4: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj na kalkulačce, ale udávej je s přesností zapsanou v tabulce.

- a) $7,7^2$ b) $0,063^2$ c) 806^2 d) $59,3^2$ e) $0,0317^2$

a) $7,7^2 = 59,29$ (řádek 7,7; sloupec 0)

b) $0,063^2$

$6,3^2 = 39,69$ (řádek 6,3; sloupec 0)

$0,063^2 = 6,3^2 \cdot 0,01^2 = 39,69 \cdot 0,0001 = 0,003969$

c) 806^2

$8,06^2 \doteq 64,96$ (řádek 8,0; sloupec 6)

$806^2 = 8,06^2 \cdot 100^2 \doteq 64,96 \cdot 10000 = 649\,600$

d) $59,3^2$

$5,93^2 \doteq 35,16$ (řádek 5,9; sloupec 3)

$0,728^2 = 7,28^2 \cdot 0,1^2 \doteq 53,00 \cdot 0,01 = 0,5300$

e) $0,0317^2$

$3,17^2 \doteq 10,05$ (řádek 3,1; sloupec 7)

$0,0317^2 = 3,17^2 \cdot 0,01^2 \doteq 10,05 \cdot 0,0001 = 0,001005$

Př. 5: Urči pomocí tabulky co nejpřesněji (s využitím všech míst). Výsledky kontroluj na kalkulačce, ale udávej je s přesností zapsanou v tabulce.

- a) $7,088^2$ b) $238,9^2$ c) $0,06207^2$

$7,088^2 \doteq 50,13$... řádek 7,0; sloupec 8
a)
$$\begin{array}{r} 11 \dots \text{sloupec 8 oprav} \\ \hline 50,24 \end{array}$$

$7,088^2 \doteq 50,24$

$2,389^2 \doteq 5,664$... řádek 2,3; sloupec 8
b)
$$\begin{array}{r} 42 \dots \text{sloupec 9 oprav} \\ \hline 5,706 \end{array}$$

$238,9^2 = 2,389^2 \cdot 100^2 \doteq 5,706 \cdot 10\,000 = 57\,060$

$6,207^2 \doteq 38,44$... řádek 6,2; sloupec 0
c)
$$\begin{array}{r} 9 \dots \text{sloupec 7 oprav} \\ \hline 38,53 \end{array}$$

$0,06207^2 = 6,207^2 \cdot 0,01^2 \doteq 38,53 \cdot 0,0001 = 0,003853$

Př. 6: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj na kalkulačce, ale udávej je s přesností zapsanou v tabulce.

a) $\sqrt{25,60}$ b) $\sqrt{56,7}$ c) $\sqrt{68,56}$ d) $\sqrt{3080}$ e) $\sqrt{0,004747}$

a) $\sqrt{25,60} \doteq 5,06$ (řádek 5,0; sloupec 6)

b) $\sqrt{56,7} \doteq 7,53$ (řádek 7,5; sloupec 3)

c) $\sqrt{68,56} \doteq 8,28$ (řádek 8,2; sloupec 8)

d) $\sqrt{30,80} \doteq 5,55$ (řádek 5,5; sloupec 5)

$$\sqrt{3080} = \sqrt{30,80} \cdot \sqrt{100} \doteq 5,55 \cdot 10 = 55,5$$

e) $\sqrt{47,47} \doteq 6,89$ (řádek 6,8; sloupec 9)

$$\sqrt{0,004747} = \sqrt{47,47} \cdot \sqrt{0,0001} \doteq 6,89 \cdot 0,01 = 0,0689$$

Pedagogická poznámka: Naprostá většina žáků pochopí sama, že musí obrátit předchozí postup (odmocňovaná čísla hledat uvnitř tabulky a výsledky na krajích). Ostatním připomínám, že odmocnina nás vrací od obsahu k délce strany. Univerzální radou pak samozřejmě zůstává najít v tabulce příklad, který umíme vyřešit (třeba $\sqrt{25}$ nebo $\sqrt{1,44}$).

Př. 7: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj pomocí kalkulačky.

a) $\sqrt{3,1}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{8888}$ d) $\sqrt{1000}$ e) $\sqrt{0,007519}$

Vysvětlení oprav v tabulkách:

$$\sqrt{2,345} \doteq 1,531$$

2,341 ... řádek 1,5, sloupec 3

4 ... k diferenci 4 nejbližší oprava 3 ve sloupci 1

$$\sqrt{3,1} \doteq 1,761$$

a) $\frac{3,098}{2}$... řádek 1,7, sloupec 6
2 ... k diferenci 2 nejbližší oprava 3 ve sloupci 1

$$\sqrt{27} \doteq 5,196$$

b) $\frac{26,94}{6}$... řádek 5,1, sloupec 9
6 ... k diferenci 6 nejbližší oprava 6 ve sloupci 6

$$\sqrt{88,88} \doteq 9,427$$

c) $\frac{88,74}{14}$... řádek 9,4, sloupec 2
14 ... k diferenci 14 nejbližší oprava 13 ve sloupci 7

$$\sqrt{8888} = \sqrt{88,88} \cdot \sqrt{100} \doteq 9,427 \cdot 10 = 94,27$$

$$\sqrt{10} \doteq 3,162$$

- d) $\frac{9,986}{14}$... řádek 3,1, sloupec 6
14 ... k diferenci 14 nejbližší oprava 13 ve sloupci 2

$$\sqrt{1000} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{100} \doteq 3,162 \cdot 10 = 31,62$$

$$\sqrt{75,19} \doteq 8,671$$

- e) $\frac{75,17}{2}$... řádek 8,6, sloupec 7
2 ... k diferenci 2 nejbližší oprava 2 ve sloupci 1

$$\sqrt{0,007519} = \sqrt{75,19} \cdot \sqrt{0,0001} \doteq 8,671 \cdot 0,01 = 0,08671$$

Př. 8: Sepiš pod tabulku návod, jak s její pomocí určit druhou odmocninu. Návod sestavte společně za celou skupinu.

1. Upravíme si číslo pomocí součinu s mocninou deseti tak, abychom získali číslo větší nebo rovno 1 a menší nebo rovno než 100.
2. Najdeme upravené číslo uvnitř tabulky, hodnota odmocniny je na okrajích tabulky (číslo řádku a třetí místo je číslo sloupce).
3. Pokud se odmocňované číslo uvnitř tabulky nenachází, hledáme mezi opravami číslo, které musíme připočíst k nejbližšímu menšímu číslu uvnitř tabulky, abychom získali hodnotu co nejbližší. Označení sloupce oprav je čtvrtou číslicí ve výsledku.
3. Vynásobíme nalezené číslo odmocněnou mocninou deseti.

Shrnutí: Hodnoty druhých mocnin jsou v tabulce uvedeny uvnitř tabulky, u odmocnin postupujeme obráceně – odmocninu z čísla uvnitř tabulky najdeme v označení řádků a sloupců.