2.8.10 Druhá mocnina a odmocnina - opakování

Předpoklady: 020810

Př. 1: Sepiš, co jsme se naučili o druhých mocninách.

- $x^2 = x \cdot x$,
- obsah čtverce
- nezáporné číslo,
- u mocnin 10 (10; 100; …) zdvojnásobí počet nul (převody jednotek obsahu),
- u desetinných čísel (0,1; 0,01; …) zdvojnásobí počet desetinných míst (převody jednotek obsahu),
- $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$,
- pro $a > 1$, platí $a^2 > a$,
- pro $0 < a < 1$, platí $a^2 < a$,
- v tabulce jsou čísla *a* na krajích a výsledky a^2 uprostřed.

Př. 2: Sepiš, co jsme se naučili o druhých odmocninách.

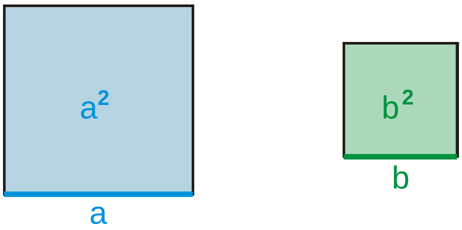
- $\sqrt{x} = a$, nezáporné číslo, pro které platí $a^2 = x$ (vyruší druhou mocninu),
- z obsahu čtverce vypočte délku strany,
- nezáporné číslo (vypočtené z jiného nezáporného čísla).
- u mocnin 10 se sudým počtem nul (100; 10 000; ...) se počet nul zmenší na polovinu,
- u desetinných čísel se sudým počtem desetinných míst (0,01; 0,0001; ...) se počet desetinných míst zmenší na polovinu,
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,
- pro $a > 1$, platí $\sqrt{a} < a$,
- pro $0 < a < 1$, platí $\sqrt{a} > a$,
- v tabulce jsou čísla *a* uvnitř, výsledky $\sqrt{a}$ na krajích.

Př. 3: Přečti a rozhodni, zda je to pravda. Najdi důkaz. "Pro všechna kladná čísla *a*, *b* platí: Jeli $a > b$, pak $a^2 > b^2$".

"Pro všechna kladná čísla *a*, *b* platí: Jeli $a > b$, pak $a^2 > b^2$".
"Pro všechna kladná čísla *a*, *b* platí: Jeli číslo *a* větší je větší i jeho druhá mocnina.

Věta zřejmě platí: $3 > 2$ a $3^2 = 9 > 2^2 = 4$.

Důkaz: Je-li $a > b$ představuje a^2 obsah čtverce s delší stranou. Čtverec s delší stranou má větší obsah a tudíž $a^2 > b^2$.



Př. 4: Doplň tabulku. Hledej všechny možnosti.

x		0,0025	-400		0,0121	
$\sqrt{x}$	0			1,7		-3

x	0	0,0025	-400	2,89	0,0121	nejde
$\sqrt{x}$	0	0,05	nejde	1,7	0,11	-3

Př. 5: Doplň tabulku. Hledej všechny možnosti.

x	-3	0,031		-150		
x^2			900		0,0016	-1600

x	-3	0,031	30; -30	-150	0,04; -0,04	nejde
x^2	9	0,000961	900	22500	0,0016	-1600

Pedagogická poznámka: V tabulce jsou dva sloupce, do kterých je možné doplnit dvě různé hodnoty. Tento okamžiku vyžaduje diskusi.

Př. 6: Vypočti nebo částečně odmocni.

a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{14}$ c) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{12}}$ d) $\sqrt{21}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{28}$

a) $\sqrt{45}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ b) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{14}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=3\cdot 7\cdot\sqrt{2}=21\sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{25\cdot 3}}{\sqrt{4\cdot 3}}=\sqrt{\dfrac{25\cdot 3}{4\cdot 3}}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$

d) $\sqrt{21}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{28}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot\sqrt{7}=7\cdot 18=126$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je připraven pro zkoušení skupiny. Každý člen dostane jeden z bodů.

Př. 7: Urči přibližně pomocí tabulky.

a) $5,83^2$ $\sqrt{3648}$ $0,1926^2$ $\sqrt{0,5307}$

b) $4,65^2$ $\sqrt{0,4369}$ $53,78^2$ $\sqrt{188,2}$

c) $2{,}74^2$ $\sqrt{8427}$ $471{,}6^2$ $\sqrt{0{,}4196}$

d) $7{,}63^2$ $\sqrt{0{,}4083}$ $27{,}82^2$ $\sqrt{6123}$

a) $5{,}83^2 \doteq 33{,}99$ $\sqrt{3648} \doteq 60{,}4$ $0{,}1926^2 \doteq 0{,}03709$ $\sqrt{0{,}5307} \doteq 0{,}7285$

b) $4{,}65^2 \doteq 21{,}62$ $\sqrt{0{,}4369} \doteq 0{,}661$ $53{,}78^2 \doteq 2893$ $\sqrt{188{,}2} \doteq 13{,}72$

c) $2{,}74^2 \doteq 7{,}508$ $\sqrt{8427} \doteq 91{,}8$ $471{,}6^2 \doteq 222400$ $\sqrt{0{,}4196} \doteq 0{,}6478$

d) $7{,}63^2 \doteq 58{,}22$ $\sqrt{0{,}4083} \doteq 6{,}39$ $27{,}82^2 \doteq 773{,}9$ $\sqrt{6123} \doteq 78{,}25$

Př. 8: Které z následujících nerovností jsou správné? Rozhodnutí zdůvodni.

a) $1 < 1{,}5^2 < 4$ b) $121 < 12{,}1^2 < 144$ c) $9 < \left(\frac{15}{4}\right)^2 < 16$

a) $1 < 1{,}5^2 < 4$
Stačí si všimnout, že krajní čísla nerovnosti jsou druhé mocniny.
$1 < 1{,}5^2 < 4$
$1^2 < 1{,}5^2 < 2^2$
Protože větší nezáporné číslo má i větší druhou mocninu, nerovnost platí.

b) $121 < 12{,}1^2 < 144$
Podobně jako v předchozím bodu využijeme toho, že krajní čísla jsou druhé mocniny.
$11^2 = 121 < 12{,}1^2 < 144 = 12^2 \Rightarrow$ pravá nerovnost neplatí.

c) $9 < \left(\frac{15}{4}\right)^2 < 16$

$3^2 = 9 < \left(\frac{15}{4}\right)^2 < 16 = 4^2$. Platí: $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \Rightarrow$ nerovnost platí.

Př. 9: Tomáš si vypsal vlastní tabulku druhých mocnin, prohlédl si ji a povídá: „Druhá mocnina je vlastně přímá úměrnost. Když zvětším *x*, zvětší se mi i x^2 “. Má pravdu?

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	9	16	25	36

Nemá pravdu, protože neplatí základní pravidlo nepřímé úměrnosti „čím víc, tím víc“.
Například mezi sloupci:

- 1 a 2 se *x* zvětší 2 krát, ale x^2 se zvětší 4 krát,
- 1 a 3 se *x* zvětší 3 krát, ale x^2 se zvětší 9 krát,
- 2 a 4 se *x* zvětší 2 krát, ale x^2 se zvětší 4 krát,
- …

Když nakreslíme graf, nezískáme polopřímku, ale zakřivenou čáru.

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou přípravou na úpravy výrazů. Netýkají se většiny třídy a řeším je pouze se zájemci.

Př. 10: Umocni.

a) $(3x)^2$ b) $\left(\frac{1}{x^2}\right)^2$ c) $(xyz)^2$ d) $(a^2b)^2$

a) $(3x)^2 = 3x \cdot 3x = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 9x^2$ b) $\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2 \cdot x^2} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^4}$

c) $(xyz)^2 = xyz \cdot xyz = x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$

d) $(a^2b)^2 = a^2b \cdot a^2b = a^2 \cdot a^2 \cdot b \cdot b = a^4b^2$

Př. 11: Odmocni. Jaká čísla můžeme v jednotlivých bodech dosazovat za proměnné?

a) $\sqrt{4b}$ b) $\sqrt{16x^2}$ c) $\sqrt{\frac{9}{x^2}}$ d) $\sqrt{x^3}$

a) $\sqrt{4b} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{b} = 2\sqrt{b}$ Za b můžeme dosazovat pouze nezáporná čísla.

b) $\sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2} = 4|x|$ Za x můžeme dosazovat všechna reálná čísla (dosazené číslo dáme na druhou (tím se ztratí záporné znaménko) a pak se teprve dělá odmocnina. $\sqrt{x^2} \neq x$, protože u záporných čísel získáme z výrazu $\sqrt{x^2}$ kladné číslo (a posloupnost operací $\sqrt{\ \ ^2}$ funguje stejně jako absolutní hodnota.

c) $\sqrt{\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{x^2}} = \frac{3}{|x|}$ Za x můžeme dosazovat všechna reálná čísla kromě nuly.

d) $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x\sqrt{x}$ Za x můžeme dosazovat pouze nezáporná čísla, proto také můžeme z výsledného zápisu vynechat absolutní hodnotu.

Shrnutí: