

2.8.11 Třetí mocnina

Předpoklady: 020810

Pedagogická poznámka: Hodina je vlastně skupinovou prací pro čtveřice. Skupiny mají nejdříve 35 minut na prozkoumání vlastností třetí mocniny a pak dostane každý ze čtveřice jiný úkol (dopilování poznámek, hledání v tabulce, dva papírky s příklady). Každý úkol oznámkuji a každý ze skupiny dostane jako známku průměrné hodnocení z těchto čtyř. Na hledání v tabulce mají k dispozici opět MFCH tabulky pro střední školy. Během společné práce mají k dispozici i kalkulačky, při zkoušení v závěru už ne.

Př. 1: V minulé hodině jsme si sepsali vše, co jsme zjistili o druhých mocninách. Třetí mocniny mají některé vlastnosti stejné, jiné podobné a další rozdílné. Projdi všechny vlastnosti druhých mocnin a prozkoumej, jak se chovají u třetích mocnin.

Druhá mocnina:

$$x^2 = x \cdot x,$$

obsah čtverce,

nezáporné číslo,

u mocnin 10 (10; 100; ...) zdvojnásobí počet nul (jednotky obsahu),

u desetinných čísel (0,1; 0,01; ...) zdvojnásobí počet desetinných míst (jednotky obsahu),

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2, \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

pro $a > 1$ platí $a^2 > a$, pro $0 < a < 1$ platí $a^2 < a$,

v tabulce jsou čísla a na krajích a výsledky a^2 uvnitř.

$$x^3 = x \cdot x \cdot x \text{ (třikrát opakujeme násobení)}$$

Známe vzorec $V = a \cdot a \cdot a = a^3$ - objem krychle.

Zkoušíme:

- $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$,
- $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$,

⇒ třetí mocnina může být kladná (pokud ji počítáme z kladného čísla) i záporná (pokud ji počítáme ze záporného čísla).

Zkoušíme:

- $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$,
- $100^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$,
- ...

⇒ U mocnin 10 (10; 100; ...) třetí mocnina počet nul ztrojnásobí (známe z převodů jednotek objemu).

Zkoušíme:

- $0,1^3 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$,

- $0,01^3 = 0,01 \cdot 0,01 \cdot 0,01 = 0,000\,001$,

- ...

⇒ U desetinných čísel (0,1; 0,01; ...) třetí mocnina počet desetinných míst ztrojnásobí (známe z převodů jednotek objemu).

Počítáme:

- $(a \cdot b)^3 = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$,

- $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$.

Podobně jako u druhé mocniny:

- $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$ - Třetí mocnina ze součinu se rovná součinu třetích mocnin.

- $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$ - Třetí mocnina z podílu se rovná podílu třetích mocnin.

Zkoušíme:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$,

- $0,6^3 = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,216$,

⇒

- pro $a > 1$ platí $a^3 > a$,

- pro $0 < a < 1$ platí $a^3 < a$.

Př. 2: Doplně tabulku.

x	0	2	-3	0,4		600		
x^3					125		-8	0,729

x	0	2	-3	0,4	5	60	-2	0,9
x^3	0	8	-27	0,064	125	216000	-8	0,729

Př. 3: Rozhodni o pravdivosti výroků. Pokud výrok není pravdivý, oprav ho co nejmenší změnou.

a) Třetí mocnina mocnin deseti (10, 100, 1000, ...) má trojnásobný počet nul.

b) Třetí mocnina reálného čísla je číslo nezáporné.

c) Třetí mocnina kladného reálného čísla je větší než jeho druhá mocnina.

a) Třetí mocnina mocnin deseti (10, 100, 1000, ...) má trojnásobný počet nul.

Pravdivý výrok. Například $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Tříkrát násobíme původní číslo a proto se počet nul ztrojnásobí.

b) Třetí mocnina reálného čísla je číslo nezáporné.

Nepravdivý výrok. Například: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 \Rightarrow$ když umocňujeme na třetí záporné číslo získáme opět záporné číslo.

Opravený výrok: Třetí mocnina nezáporného reálného čísla je číslo nezáporné.

c) Třetí mocnina kladného reálného čísla je větší než jeho druhá mocnina.

Nepravdivý výrok: Například $0,1^3 = 0,001 < 0,1^2 = 0,01$ (podobně se chovají všechna další kladná čísla menší než 1).

Opravený výrok: Třetí mocnina kladného reálného čísla většího než 1 je větší než jeho druhá mocnina.

Př. 4: Vysvětli, proč platí $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, ale $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$,

$$1 \text{ m}^3 = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 1000 \text{ dm}^3$$

Krychlové jednotky jsou třetí mocninou normálních jednotek, proto převodní vztahy obsahují trojnásobný počet nul.

Př. 5: Urči přibližně pomocí tabulky.

a) $5,2^3$

b) $44,1^3$

c) $0,7733^3$

d) $158,2^3$

a) $5,2^3 \doteq 140,6$ (řádek 5,2; sloupec 0)

b) $44,1^3$

$4,41^3 \doteq 85,77$ (řádek 4,4; sloupec 1)

$44,1^3 = 4,41^3 \cdot 10^3 \doteq 85,77 \cdot 1000 = 85\,770$

c) $0,7733^3$

$7,733^3 \doteq 461,9$... řádek 7,7, sloupec 3

5 ... sloupec 3 oprav

$$\begin{array}{r} 461,9 \\ + 5 \\ \hline 462,4 \end{array}$$

$0,7733^3 = 7,733^3 \cdot 0,1^3 \doteq 462,4 \cdot 0,001 = 0,4624$

d) $158,2^3$

$1,582^3 \doteq 3,944$... řádek 1,5; sloupec 8

14 ... sloupec 2 oprav

$$\begin{array}{r} 3,944 \\ + 14 \\ \hline 3,958 \end{array}$$

$158,2^3 = 1,582^3 \cdot 100^3 \doteq 3,958 \cdot 1000000 = 3\,958\,000$

Shrnutí: Třetí mocnina funguje podobně jako mocnina třetí, pro záporná čísla však dává záporné výsledky.