

2.8.14 Hledání mocnin a odmocnin v tabulkách

Předpoklady: 0208012

Pedagogická poznámka: Hodinu je samozřejmě možné vynechat, pravděpodobnost, že žáci budou v budoucnu hledat hodnoty mocnin a odmocnin v tabulkách je minimální. Na druhou stranu ji považuji za velice užitečnou, kvůli orientaci ve velkém množství čísel, ale i kvůli tomu, jak šikovně dokázali lidé před příchodem kalkulaček problém se složitějšími výpočty řešit. Stejným způsobem to podávám i žákům.

Př. 1: Zjednoduš (uprav tak, aby výsledek obsahoval co nejméně co nejmenších odmocnin). a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{72}$

c) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{20}$ d) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{9}$ e) $\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{12}$

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

b) $\sqrt{72} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{8} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 6 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

c) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 20 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 60\sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot 2 = 6$

e) $\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} =$
 $= 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 10 \cdot \sqrt[3]{9}$

Pedagogická poznámka: Hodina navazuje na hodinu 020809, pokud jste ji neprobírali, je třeba začít tam. Postupy si předem nevysvětlujeme, jen upozorníme, že tabulka obsahuje mocniny i odmocniny včetně čísel, u kterých si výsledek dokážeme spočítat z paměti a tak si ověřit, zda v tabulce hledáme správně. Pracujeme ve čtyřčlenných skupinách, kde se žáci snaží, aby všichni pochopili co nejvíce. Navíc po třídě chodím i já a pomáhám, kde je třeba. Na konci hodiny skupiny rozpustíme, každý ze skupiny spočítá jeden z bodů příkladu 8 a z počtu vyřešených příkladů je možné spočítat skupinové skóre (naložit se s tím dá různě, já mám nejraději překonávání laťky bez sestavování pořadí, takže každá skupina, která má celkově maximálně tři chyby a jejíž žádný člen neudělal více než dvě chyby má plus, skupina, která má celkově maximálně jednu chybu má plusy dva). Pokud se bude na konci provádět nějaké skupinové hodnocení, je třeba to žákům sdělit předem.

Př. 2: Urči pomocí tabulky.

a) $9,3^2$

b) $7,4^2$

c) $9,73^2$

d) $4,82^2$

a) $9,3^2 = 86,49$ (řádek 9,3; sloupec 0)

b) $7,4^2$

$7,4^2 = 54,76$ (řádek 7,4; sloupec 0)

c) $9,73^2$

$9,73^2 \doteq 94,67$ (řádek 9,7; sloupec 3)

d) $0,482^2$

$4,82^2 \doteq 23,23$ (řádek 4,8; sloupec 2)

Př. 3: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj pomocí kalkulačky.

a) 530^2 b) $0,0412^2$ c) $80,6^3$ d) $0,593^3$ e) $0,0317^3$

a) 530^2

$5,3^2 = 28,09$ (řádek 5,3; sloupec 0)

$530^2 = 6,3^2 \cdot 100^2 = 28,09 \cdot 10000 = 280\,900$

b) $0,0412^2$

$4,12^2 = 16,97$ (řádek 4,1; sloupec 2)

$0,0412^2 = 4,12^2 \cdot 0,01^2 \doteq 16,97 \cdot 0,0001 = 0,001697$

Pro další body používáme tabulku třetí mocniny (postup je stejný).

c) $80,6^3$

$8,06^3 \doteq 523,6$ (řádek 8,0; sloupec 6)

$80,6^3 = 8,06^3 \cdot 10^3 \doteq 523,6 \cdot 1\,000 = 523\,600$

d) $0,593^3$

$5,93^3 \doteq 208,5$ (řádek 5,9; sloupec 3)

$0,593^3 = 5,93^3 \cdot 0,1^3 \doteq 208,5 \cdot 0,001 = 0,2085$

e) $0,0317^3$

$3,17^3 \doteq 31,86$ (řádek 3,1; sloupec 7)

$0,0317^3 = 3,17^3 \cdot 0,01^3 \doteq 31,86 \cdot 0,000\,001 = 0,000\,0318\,6$

Př. 4: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj pomocí kalkulačky.

a) $3,821^2$ b) $7,059^2$ c) $177,1^2$ d) $0,5806$ e) 3894^2

Vysvětlení v tabulkách:

$$\begin{array}{r} 2,246^2 \doteq \quad 5,018 \quad \dots \quad \text{řádek 2,2, sloupec 4} \\ \quad \quad \quad + 27 \quad \dots \quad \text{sloupec 6 oprav} \\ \hline \quad \quad \quad 5,045 \end{array}$$

a) $3,821^2$

V tabulkách můžeme přímo nalézt pouze hodnotu $3,82^2$:

$3,82^3 \doteq 14,59$ (řádek 3,8; sloupec 2)

Hodnota $3,821^2$ je větší zřejmě o hodnotu uvedenou v sloupci oprav v řádku 3,8 pod číslem 1: hodnota oprav 1 $\Rightarrow 3,821^2 \doteq 14,59 + 0,01 = 14,60$.

Kontrola pomocí kalkulačky: $3,821^2 = 14,600041$.

b) $7,059^2$

$$\begin{array}{r} 7,059^2 \doteq \quad 49,70 \dots \text{řádek 7,0, sloupec 5} \\ \quad \quad \quad +13 \dots \text{sloupec 9 oprav} \\ \hline \quad \quad \quad 49,83 \end{array}$$

Kontrola pomocí kalkulačky: $7,059^2 = 49,829481$.

c) $177,1^2$

$$\begin{array}{r} 1,771^2 \doteq \quad 3,133 \dots \text{řádek 1,7, sloupec 7} \\ \quad \quad \quad +3 \dots \text{sloupec 1 oprav} \\ \hline \quad \quad \quad 3,136 \end{array}$$

$$177,1^2 = 1,771^2 \cdot 100^2 \doteq 3,136 \cdot 10\,000 = 31\,360$$

Kontrola pomocí kalkulačky: $177,1^2 = 31\,364,41$.

d) $0,5806$

$$\begin{array}{r} 5,806^2 \doteq \quad 33,64 \dots \text{řádek 5,8, sloupec 0} \\ \quad \quad \quad +7 \dots \text{sloupec 6 oprav} \\ \hline \quad \quad \quad 33,71 \end{array}$$

$$0,5806^2 = 5,806^2 \cdot 0,1^2 \doteq 33,71 \cdot 0,01 = 0,3371$$

Kontrola pomocí kalkulačky: $0,5806^2 = 0,33709636$.

e) 3894^2

$$\begin{array}{r} 3,894^2 \doteq \quad 15,13 \dots \text{řádek 3,8, sloupec 9} \\ \quad \quad \quad +3 \dots \text{sloupec 3 oprav} \\ \hline \quad \quad \quad 15,16 \end{array}$$

$$3894^2 = 3,894^2 \cdot 1000^2 \doteq 15,16 \cdot 1\,000\,000 = 15\,160\,000$$

Kontrola pomocí kalkulačky: $3894^2 = 15\,163\,236$.

Př. 5: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj pomocí kalkulačky.

a) $\sqrt{17,64}$ b) $\sqrt{44,62}$ c) $\sqrt[3]{85,77}$ d) $\sqrt[3]{310,3}$

Tabulky neobsahují tabulku druhých odmocnin \Rightarrow i hodnoty odmocnin musíme najít v tabulkách mocnin.

Myšlenka: Pokud hledáním zjistíme, že platí $9,3^2 = 86,49$ (řádek 9,3; sloupec 0), víme zároveň, že platí i $\sqrt{86,49} = 9,3$ (dvojice spárovaných čísel je stejná, jen vycházíme z čísla 86,49 místo čísla 9,3, hledáme číslo, které se po umocnění na druhou rovná 86,49, ale už víme, že je to 9,3) \Rightarrow číslo, které chceme odmocnit hledáme uvnitř tabulky druhých mocnin. Výsledkem odmocniny je pak číslo sestavené z údajů na krajích.

a) $\sqrt{17,64} = 4,2$ (řádek 4,2; sloupec 0)

b) $\sqrt{44,62} \doteq 6,68$ (řádek 6,6; sloupec 8)

Řešení dalších bodů hledáme v tabulce třetích mocnin.

c) $\sqrt[3]{85,77} \doteq 4,41$ (řádek 4,4; sloupec 1)

d) $\sqrt[3]{310,3} \doteq 6,77$ (řádek 6,7; sloupec 7)

Př. 6: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj pomocí kalkulačky.

a) $\sqrt{0,2560}$

b) $\sqrt{567000}$

c) $\sqrt[3]{0,7711}$

d) $\sqrt[3]{49430}$

e) $\sqrt[3]{0,000\ 08694}$

Číslo, které chceme odmocnit hledáme uvnitř tabulky druhých mocnin. Výsledkem odmocniny je pak číslo sestavené z údajů na krajích.

a) $\sqrt{0,2560}$

$\sqrt{25,60} \doteq 5,06$ (řádek 5,0; sloupec 6)

$\sqrt{0,2560} = \sqrt{25,60} \cdot \sqrt{0,01} \doteq 5,06 \cdot 0,1 = 0,506$

b) $\sqrt{567000}$

$\sqrt{56,7} \doteq 7,53$ (řádek 7,5; sloupec 3)

$\sqrt{567000} = \sqrt{50,70} \cdot \sqrt{10000} \doteq 7,53 \cdot 100 = 753$

c) $\sqrt[3]{0,7711}$

$\sqrt[3]{771,1} \doteq 9,17$ (řádek 7,7; sloupec 1)

$\sqrt[3]{0,7711} = \sqrt[3]{771,1} \cdot \sqrt[3]{0,001} \doteq 9,17 \cdot 0,1 = 0,917$

d) $\sqrt[3]{49430}$

$\sqrt[3]{49,43} \doteq 3,67$ (řádek 3,6; sloupec 7)

$\sqrt[3]{49430} = \sqrt[3]{49,43} \cdot \sqrt[3]{1000} \doteq 3,67 \cdot 10 = 36,7$

e) $\sqrt[3]{0,000\ 08694}$

$\sqrt[3]{86,94} \doteq 4,43$ (řádek 4,4; sloupec 3)

$\sqrt[3]{0,000\ 08694} = \sqrt[3]{86,94} \cdot \sqrt[3]{0,000\ 001} \doteq 4,43 \cdot 0,001 = 0,00443$

Př. 7: Urči pomocí tabulky. Výsledky kontroluj pomocí kalkulačky.

a) $\sqrt{3,1}$

b) $\sqrt{27}$

c) $\sqrt{8888}$

d) $\sqrt{1000}$

e) $\sqrt{0,007519}$

Vysvětlení oprav v tabulkách:

$$\sqrt{2,345} \doteq 1,531$$

2,341 ... řádek 1,5, sloupec 3

4 ... k diferenci 4 nejbližší oprava 3 ve sloupci 1

a) $\sqrt{3,1}$

Problém: V tabulce druhých mocnin se nenachází číslo 3,1, pouze čísla 3,098 a 3,133.

Vydeme z čísla 3,098 (bližší hodnota): $\sqrt{3,1} \doteq 1,76$ (řádek 1,7, sloupec 6).

Zkusíme výsledek zpřesnit pomocí oprav. U umocňování číslo v nadpisu oprav zpřesňovalo umocňované číslo o jedno desetinné místo, hodnota opravy uvnitř tabulky se pak přičítala k výsledku \Rightarrow zkusíme postup obrátit.

Které číslo jsme museli přičíst k 3,098, abychom získali 3,1?

Číslo 0,002 \Rightarrow v hodnotách oprav uvnitř tabulky hledáme v řádku 1,7 hodnotu opravy 2.

Nejbližší nelezená je hodnota 3, ve sloupci 1 \Rightarrow přičteme 0,001 k výsledku 1,76.

$$\sqrt{3,1} \doteq 1,761$$

3,098 ... řádek 1,7, sloupec 6

2 ... k diferenci 2 nejbližší oprava 3 ve sloupci 1

$$\sqrt{27} \doteq 5,196$$

b) $\frac{26,94}{6}$... řádek 5,1, sloupec 9

6 ... k diferenci 6 nejbližší oprava 6 ve sloupci 6

$$\sqrt{88,88} \doteq 9,427$$

c) $\frac{88,74}{14}$... řádek 9,4, sloupec 2

14 ... k diferenci 14 nejbližší oprava 13 ve sloupci 7

$$\sqrt{8888} = \sqrt{88,88} \cdot \sqrt{100} \doteq 9,427 \cdot 10 = 94,27$$

$$\sqrt{10} \doteq 3,162$$

d) $\frac{9,986}{14}$... řádek 3,1, sloupec 6

14 ... k diferenci 14 nejbližší oprava 13 ve sloupci 2

$$\sqrt{1000} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{100} \doteq 3,162 \cdot 10 = 31,62$$

$$\sqrt{75,19} \doteq 8,671$$

e) $\frac{75,17}{2}$... řádek 8,6, sloupec 7

2 ... k diferenci 2 nejbližší oprava 2 ve sloupci 1

$$\sqrt{0,007519} = \sqrt{75,19} \cdot \sqrt{0,0001} \doteq 8,671 \cdot 0,01 = 0,08671$$

Pedagogická poznámka: Následující příklady je možné použít k domácímu procvičování pro ty, kteří měli v hodině problémy. Já v hodině nechávám žáky pracovat ve skupinách

Př. 8: Urči přibližně pomocí tabulky.

a) $5,83^2$

$$\sqrt{3648}$$

$$0,1926^2$$

$$\sqrt{0,5307}$$

$$b) 4,65^2$$

$$\sqrt{0,4369}$$

$$53,78^2$$

$$\sqrt{188,2}$$

$$c) 2,74^2$$

$$\sqrt{8427}$$

$$471,6^2$$

$$\sqrt{0,4196}$$

$$d) 7,63^2$$

$$\sqrt{0,4083}$$

$$27,82^2$$

$$\sqrt{6123}$$

$$a) 5,83^2 \doteq 33,99$$

$$\sqrt{3648} \doteq 60,4$$

$$0,1926^2 \doteq 0,03709$$

$$\sqrt{0,5307} \doteq 0,7285$$

$$b) 4,65^2 \doteq 21,62$$

$$\sqrt{0,4369} \doteq 0,661$$

$$53,78^2 \doteq 2893$$

$$\sqrt{188,2} \doteq 13,72$$

$$c) 2,74^2 \doteq 7,508$$

$$\sqrt{8427} \doteq 91,8$$

$$471,6^2 \doteq 222400$$

$$\sqrt{0,4196} \doteq 0,6478$$

$$d) 7,63^2 \doteq 58,22$$

$$\sqrt{0,4083} \doteq 6,39$$

$$27,82^2 \doteq 773,9$$

$$\sqrt{6123} \doteq 78,25$$

Shrnutí: Hodnoty mocnin a odmocnin je možné určovat také pomocí tabulky (velmi důmyslně uspořádané).