

2.8.22 Využití Pythagorovy věty I

Předpoklady: 020820

Pedagogická poznámka: Ve všech slovních úlohách „z praxe“ se snažím používat běžnou terminologii. Pokud žáci slova neznají, mohou si je najít na internetu, nebo (což je samozřejmě daleko lepší) si jejich význam odvodit z kontextu.

Př. 1: Vypočti odmocniny a výsledek zapiš také jako desetinné číslo.

a) 2^{-2} b) 5^{-1} c) 10^{-2} d) $2^{-2} \cdot 5^{-1}$

a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$

b) $5^{-1} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$

c) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$

d) $2^{-2} \cdot 5^{-1} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0,05$

Př. 2: Trojúhelník ABC má délky stran 8; 15; 17. Je pravoúhlý?

Pokud je trojúhelník pravoúhlý, musí pro délky jeho stran platit Pythagorova věta:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

- $a^2 + b^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$
- $c^2 = 17^2 = 289$

Pythagorova věta platí \Rightarrow trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Př. 3: Urči přeponu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 5 cm a 7 cm.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} \doteq 8,6$$

Pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 5 cm a 7 cm má přeponu o velikosti $\sqrt{74}$.

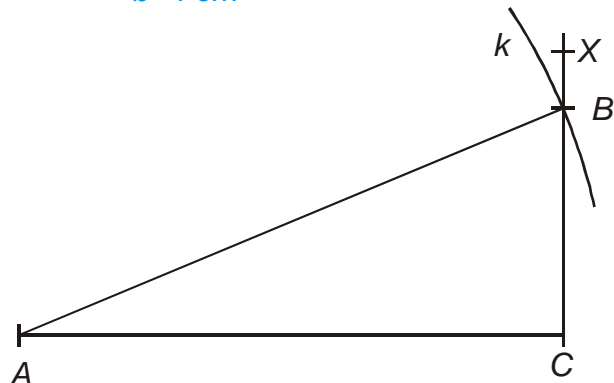
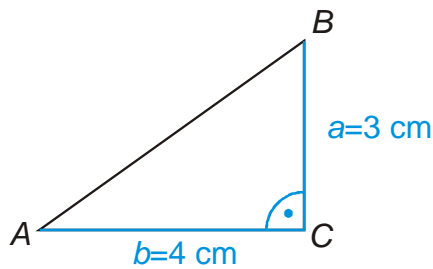
Př. 4: Urči odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 7,8 cm a odvěsnou 7,2 cm. Zkontroluj výsledek rýsováním.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad / -b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{7,8^2 - 7,2^2} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

Druhá odvěsna pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 7,8 cm a odvěsnou 7,2 cm má délku 3 cm.



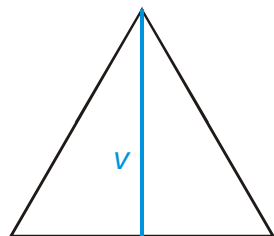
Zápis konstrukce:

1. $AC, |AC| = b = 4 \text{ cm}$
2. $\vdash \rightarrow CX, CX \perp AC$
3. $k(A; 7,8 \text{ cm})$
4. $B \in CX \cap k$
5. $\triangle ABC$

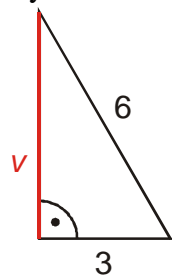
Měřením zjistíme, že délka strany CB je 3 cm.

Pedagogická poznámka: Následující příklady obsahují i starší poznatky (obsah trojúhelníku, procenta). Je třeba sledovat situaci ve třídě a pokud se u někoho vyskytují problémy, tlačít na jejich řešení.

Př. 5: Urči výšku a obsah rovnostranného trojúhelníku o straně 6 cm.



Výška rozdělí rovnostranný trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.



$$c^2 = a^2 + b^2 \quad / -b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$v = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} \text{ cm} = \sqrt{27} \doteq 5,2 \text{ cm}$$

Obsah trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{27}}{2} \text{ cm}^2 = 3\sqrt{27} \text{ cm}^2 \doteq 15,6 \text{ cm}^2$.

Rovnostranný trojúhelník o straně 6 cm, má výšku dlouhou přibližně 5,2 cm a obsah přibližně $15,6 \text{ cm}^2$.

Př. 6: Obyvatelé sídliště si zkracují cestu k autobusu přes trávník. O kolik procent si cestu zkrátí, jestliže chodník vedle parkoviště má od počátku zkratky k chodníku délku 90

m a chodník podél silnice ke konci zkratky délku 42 m?



Části chodníků se zkratkou tvoří pravoúhlý trojúhelník (chodníky tvoří odvěsny, zkratka přeponu).



$$c^2 = a^2 + b^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{90^2 + 42^2} \text{ m} = \sqrt{9864} \text{ m} \doteq 99,3 \text{ m}$$

Původní cesta: $90 + 42 \text{ m} = 132 \text{ m}$.

Zkrácení cesty: $132 - 99,3 \text{ m} = 32,7 \text{ m}$

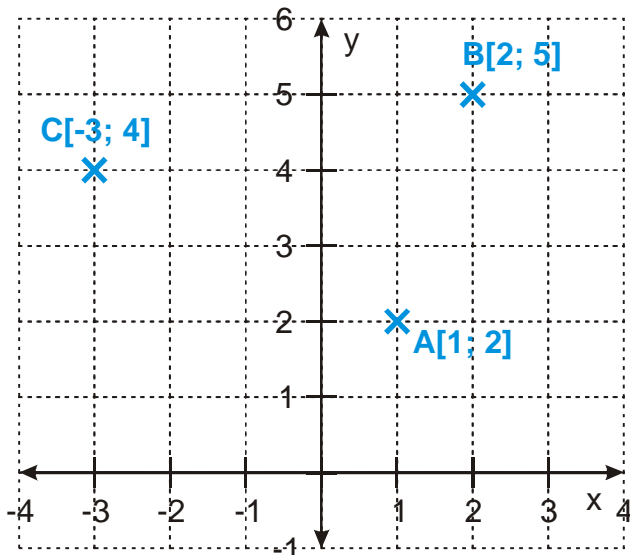
100 %	...	132 m
x %	...	32,7 m

$$\frac{x}{32,7} = \frac{100}{132} \quad / \cdot 32,7$$

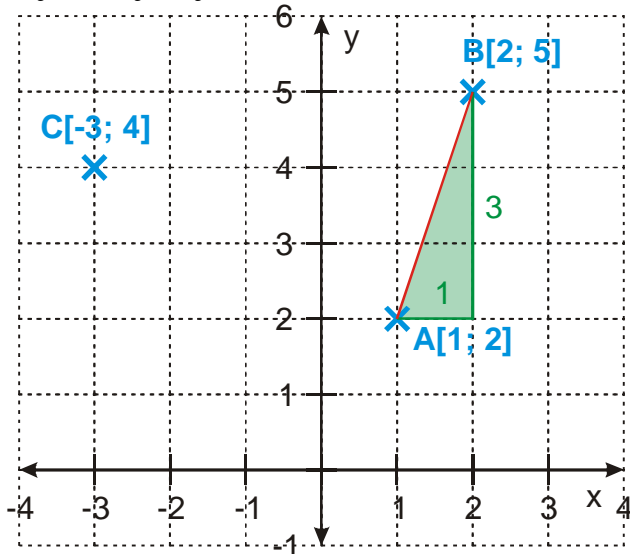
$$x = \frac{100}{132} \cdot 32,7 \doteq 25$$

Obyvatelé si cestu zkrátí o 25 %.

Př. 7: Vrcholy trojúhelníku ABC mají souřadnice $A[1;2]$, $B[2;5]$ a $C[-3;4]$. Zakresli body do soustavy souřadnic a urči délky stran trojúhelníku ABC .



Nejdříve zjišťujeme vzdálenost bodů A a $B \Rightarrow$ hledáme pravoúhlý trojúhelník.



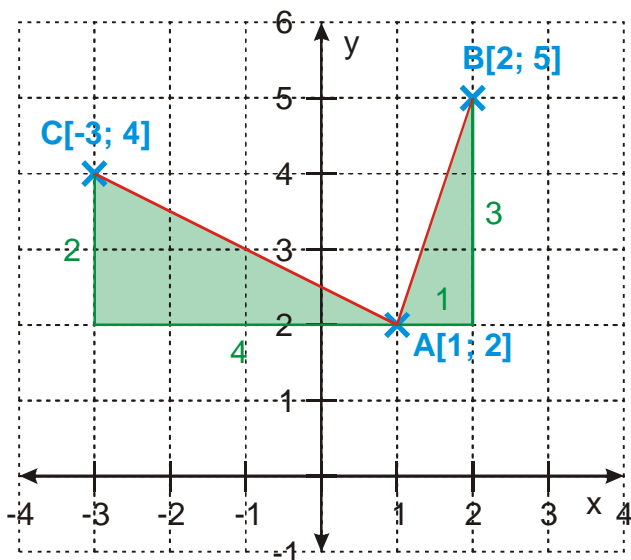
Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

- vodorovná (x -ové souřadnice): $2 - 1 = 1$,
- svislá (y -ové souřadnice): $5 - 2 = 3$.

Přepona: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \doteq 3,2$.

$|AB| = \sqrt{10} \doteq 3,2$.

Vzdálenost AC



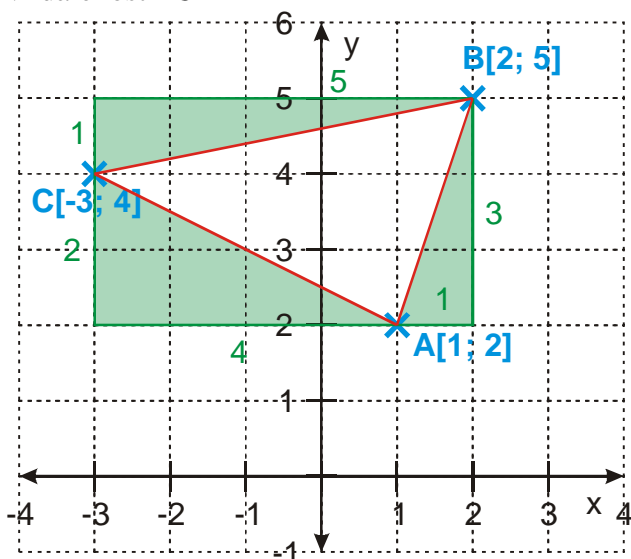
Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

- vodorovná (x -ové souřadnice): $1 - (-3) = 4$,
- svislá (y -ové souřadnice): $4 - 2 = 2$.

Přepona: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \doteq 4,5$.

$|AC| = 2\sqrt{5} \doteq 4,5$.

Vzdálenost BC



Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

- vodorovná (x -ové souřadnice): $2 - (-3) = 5$,
- svislá (y -ové souřadnice): $5 - 4 = 1$.

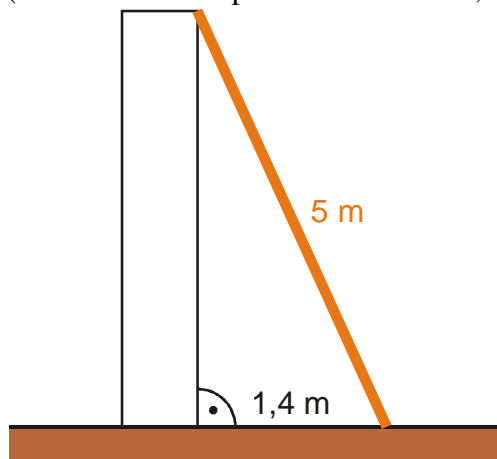
Přepona: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \doteq 5,1$.

$|BC| = \sqrt{26} \doteq 5,1$.

Př. 8: Jarda potřebuje změřit výšku zdi. Ví, že je větší než čtyři a půl metru, ale nižší než pět metrů. Bohužel nemá k dispozici ani žebřík ani dostatečně dlouhý pevný metr. Našel však na zahradě 5 m dlouhou střešní lať. Navrhni, jak pomocí latě a normálního zednického metru výšku zdi změřit. Svůj postup využij pro určení výšky

zdi v případě, že Jarda naměří pomocí metru vzdálenost 1,4 m. Co musí být splněno, aby postup fungoval?

Jarda může opřít lať o zeď tak, aby se zdi dotýkala v jejím nejvyšším bodě. Vznikne tak, pravouhlý trojúhelník, ve kterém Jarda může znát dvě strany: přeponu (lať) a jednu odvěsnu (vzdálenost mezi patou zdi a místem, kde se země dotýká opřené lať).



Pokud má postup fungovat, musí být zem u zdi vodorovná (abychom získali pravouhlý trojúhelník).

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad / -b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 1,4^2} \text{ m} = \sqrt{23,04} \text{ m} = 4,8 \text{ m}$$

Zeď je vysoká 4,8 m.

Shrnutí: Mnoho vzdáleností určíme tím, že v obrázku najdeme vhodný pravouhlý trojúhelník a pomocí Pythagorovy věty určíme jednu ze stran.