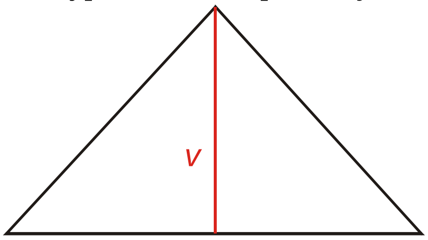
2.8.24 Využití Pythagorovy věty III

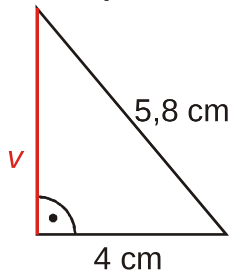
Předpoklady: 020823

Př. 1: Urči obsah rovnoramenného trojúhelníku se základnou 8 cm a rameny 5,8 cm.

Pro výpočet obsahu potřebujeme znát jednu ze stran a odpovídající výšku.



V rovnoramenném trojúhelníku je výška k základně zároveň těžnicí a vychází ze středu základny $\Rightarrow$ rozděluje trojúhelník na dva stejné pravoúhlé trojúhelníky.



Výška je odvěsnou v tomto trojúhelníku.

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad / -b^2$$

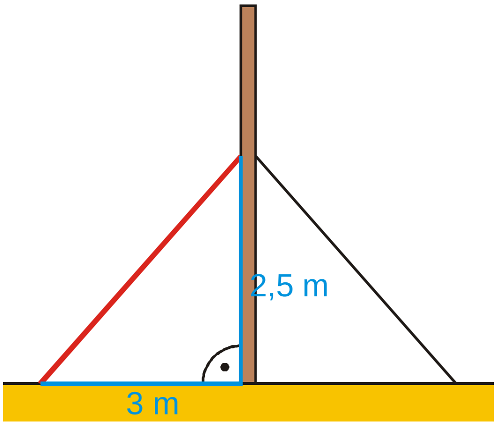
$$a^2 = c^2 - b^2 \qquad / \sqrt{\;}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5{,}8^2 - 4^2}\ \text{cm} = 4{,}2\ \text{cm}$$

Obsah trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{4 \cdot 4{,}2}{2}\ \text{cm}^2 = 8{,}4\ \text{cm}^2$.

Rovnoramenný trojúhelník se základnou dlouhou 8 cm a rameny dlouhými 5,8 cm má obsah $8{,}4\ \text{cm}^2$.

Př. 2: Stožár má být ukotven pomocí čtyř bočních lan připevněných ke stožáru ve výšce 2,5 m a ukotvených do země ve vzdálenosti 3 m od paty stožáru. Kolik metrů lana bude k ukotvení třeba? K vypočtené přímé délce přidej ještě 7% na upevnění.



Délka každého bočního lana představuje přeponu v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami 3 m a 2,5 m.

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2,5^2 + 3^2}\ \text{m} \doteq 3,9\,\text{m}$

4 lana: $4 \cdot 3,9\ \text{m} = 15,6\,\text{m}$

Výpočet rezervy na upevnění

100 % … 15,6 m

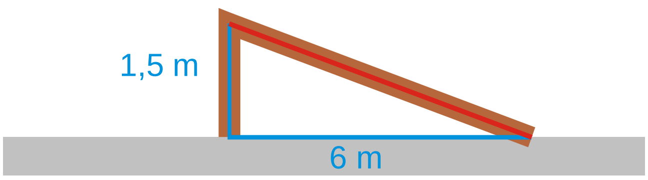
107 % … x

$\frac{x}{107} = \frac{15,6}{100} \Rightarrow x = \frac{15,6}{100} \cdot 107\,\text{m} \doteq 16,7\,\text{m}$

Na ukotvení stožáru bude potřeba celkem 16,7 m lana.

Pedagogická poznámka: Nakreslení obrázku je velký problém. Žáci často kreslí obrázek „prostorový“ se všemi čtyřmi lany a pak do něj nejsou schopni dokreslit zadané vzdálenosti (nejčastěji kreslí 3 m od jednoho lana k druhému). Chci co nejjednodušší obrázek (jak tam musíme lana přidělat, aby stožár držela), pak se bavíme o tom, co znamená pata u člověka a co asi bude znamenat pata stožáru.

Př. 3: Bouřka zlomila smrk ve výšce 1,5 m. Jeho špička se dotýká země 6 m od pařezu. Jak byl strom původně vysoký?



Délku ulomené část stromu můžeme vypočítat jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku.

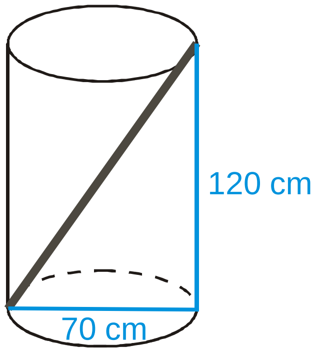
$c^2 = a^2 + b^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1,5^2 + 6^2}\ \text{m} \doteq 6,2\,\text{m}$

Celková výška stromu: $1,5+6,2\,\mathrm{m}=7,7\,\mathrm{m}$.

Před zlomením měl smrk výšku 7,7 m.

Př. 4: Jana přechovává přes zimu dřevěné tyčky k rajčatům v prázdném zahradním sudu o průměru 70 cm a výšce 120 cm. Jakou největší délku mohou tyčky mít, aby se celé schovaly do sudu a Jana mohla sud přiklopit víkem?



Nejdelší tyčky se do sudu vejdou, kdy je položíme napříč (podobně jako tyčku do kufru auta v předchozí hodině). V takovém případě tvoří tyčka přeponu v pravoúhlém trojúhelníku.

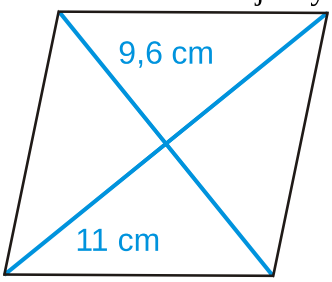
$c^2=a^2+b^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{70^2+12^2}\ \mathrm{cm}\doteq 139\,\mathrm{cm}$

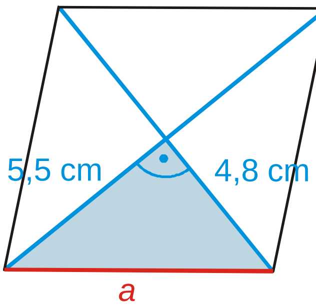
Nejdelší tyčky, které se vejdou do sudu, mají délku 139 cm.

Př. 5: Vypočti obvod kosočtverce, jehož úhlopříčky mají délky 9,6 cm a 11 cm.

Obvod kosočtverce je čtyřnásobek délky strany.



Speciální vlastnost kosočtverce: Úhlopříčky jsou navzájem kolmé a navzájem se půlí $\Rightarrow$ rozdělí kosočtverec na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky, jejichž přeponami jsou strany kosočtverce.



$c^2=a^2+b^2 \qquad /\sqrt{\ }$

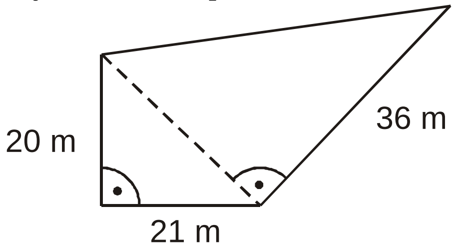
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5{,}5^2 + 4{,}8^2}\ \text{cm} = 7{,}3\,\text{cm}$

$o = 4a = 4 \cdot 7{,}3\,\text{cm} = 29{,}2\,\text{cm}$

Kosočtverec má obvod 29,2 cm.

Pedagogická poznámka: Většině žáků je třeba poradit, jakou speciální vlastnost mají úhlopříčky kosočtverce.

Př. 6: Čtyřúhelníková parcela má v katastru uvedeny tyto rozměry. Urči její výměru.



Parcela se skládá ze dvou pravoúhlých trojúhelníků. Přepona levého trojúhelníku je odvěsnou pravého.

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20^2 + 21^2}\ \text{cm} = 29\,\text{cm}$

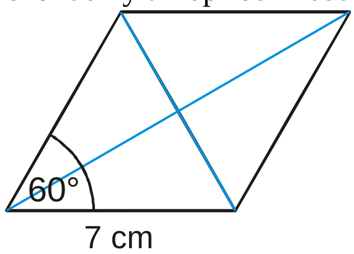
- Obsah levého trojúhelníku: $S_1 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{20 \cdot 21}{2}\,\text{m}^2 = 210\,\text{m}^2$.
- Obsah pravého trojúhelníku: $S_2 = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{29 \cdot 36}{2}\,\text{m}^2 = 522\,\text{m}^2$.

Celková výměra: $S = S_1 + S_2 = 210 + 522\,\text{m}^2 = 732\,\text{m}^2$

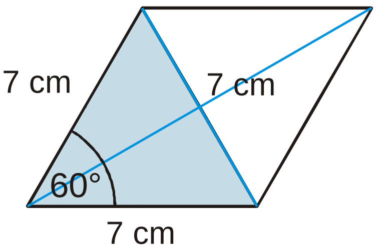
Parcela má výměru $732\,\text{m}^2$.

Pedagogická poznámka: Největším problémem je slovo výměra. Ptám se, co je u pozemků nejdůležitější.

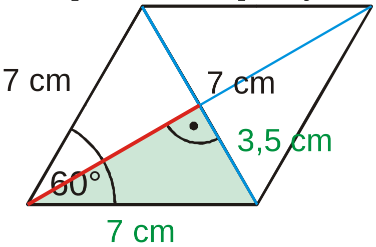
Př. 7: Urči délky úhlopříček kosočtverce.



Zdá se, že máme málo údajů. Hledáme cestu, jak využít zadanou hodnotu úhlu.



Kosočtverec je kratší úhlopříčkou rozdělen na dva shodné trojúhelníky. Modrý trojúhelník má úhel $60°$ a dvě shodné strany 7 cm $\Rightarrow$ je rovnostranný a jeho třetí strana (kratší úhlopříčka) má také velikost 7 cm.
Stále platí, že úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé a půlí se.



Delší odvěsna v zeleném trojúhelníku představuje polovinu úhlopříčky.

$$a^2+b^2=c^2 \qquad /-b^2$$

$$a^2=c^2-b^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

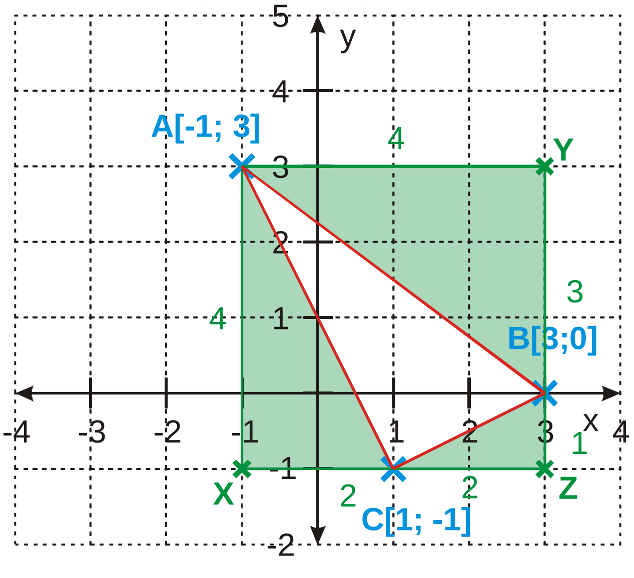
$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{7^2-3{,}5^2}\ \text{cm}=6{,}1\,\text{cm}$$

Celá úhlopříčka: $2\cdot 6{,}1\,\text{cm}=12{,}2\,\text{cm}$.

Pedagogická poznámka: Rozhodujícím okamžikem je nalezení rovnostranného trojúhelníka. Snažím se to neprozradit, a proto nejdříve doporučuji zjistit, k čemu by mohla být dobrá hodnota úhlu.

Př. 8: V kartézských souřadnicích jsou dány body $A[-1;3]$, $B[3;0]$, $C[1;-1]$. Rozhodni, zda je trojúhelník ABC pravoúhlý.

Zakreslíme body do soustavy souřadnic.



Body tvoří trojúhelník, úhel u vrcholu *C* by mohl být pravý. O pravosti trojúhelníku se můžeme přesvědčit pomocí Pythagorovy věty $\Rightarrow$ potřebujeme znát délky stran trojúhelníku *ABC*.
Délky stran trojúhelníku nejsou zadány, ale můžeme je určit jako přepony pravoúhlých trojúhelníků, které můžeme vytvořit z uzlových bodů sítě.

$a^2 + b^2 = c^2 \quad / \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Strana *AC* z trojúhelníku *ACX*: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.
- Strana *BC* z trojúhelníku *BCZ*: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
- Strana *AB* z trojúhelníku *ABY*: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Dosadíme do Pythagorovy věty a ověříme, zda platí pro i pro strany trojúhelníku *ABC*.

$a^2 + b^2 = c^2$

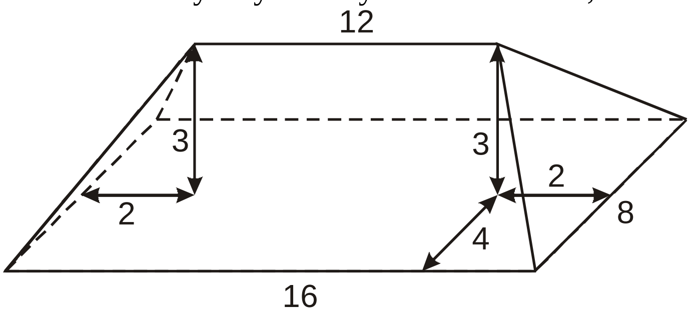
$\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2 = 5^2$

$5 + 20 = 25$

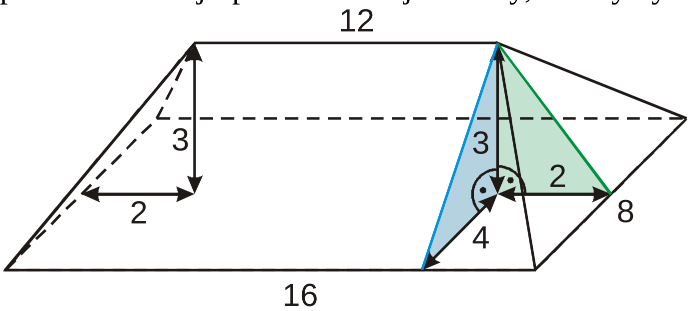
$25 = 25$ - platí $\Rightarrow$ trojúhelník *ABC* je pravoúhlý.

Př. 9: Valbová střecha má zakrýt půdorys 8 m x 16 m. Hřeben střechy má být dlouhý 12 m a má být 3 m nad základnou střechy. Nakresli obrázek situace a spočti plochu střechy.

Valbová střecha není zešikmená pouze ze dvou bočních stran, ale i z čelních stran. Skládá se tak ze dvou lichoběžníků a ze dvou trojúhelníků.
Obrázek střechy s vyznačenými vzdálenostmi, které známe, nebo můžeme dopočítat.



Plocha střechy se skládá ze dvou shodných lichoběžníků a dvou rovnoramenných trojúhelníků. Potřebujeme určit výšky trojúhelníků i lichoběžníků. Dokreslíme je do obrázku a pokusíme se najít pravoúhlé trojúhelníky, kde by výšky vystupovaly v roli jedné ze stran.



Výška v lichoběžníku (modrý trojúhelník): $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}\ \text{m} = \sqrt{25}\ \text{m} = 5\ \text{m}$.

Výška v trojúhelníku (zelený trojúhelník): $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2}\ \text{m} = \sqrt{13}\ \text{m} \doteq 3{,}6\ \text{m}$.

Plocha lichoběžníků: $S = \frac{(a+c)v}{2} \cdot 2 = (a+c)v = (16+12) \cdot 5\ \mathrm{m}^2 = 140\ \mathrm{m}^2$.

Plocha trojúhelníků: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot 2 = a \cdot v_a = 8 \cdot 3{,}6\ \mathrm{m}^2 = 28{,}8\ \mathrm{m}^2$

Střecha má celkovou plochu $168{,}8\ \mathrm{m}^2$.

Shrnutí: