

3.1.3 Úměrnosti

Předpoklady: 020522

Př. 1: Čím se vyznačuje přímá, čím nepřímá úměrnost dvou veličin? Jak každou z nich řešíme pomocí trojčlenky?

Přímá úměrnost

Platí: "Čím více, tím více."

- Kolikrát se zvětší jedna veličina, tolikrát se zvětší druhá veličina.
- Poměr se zachovává.
- "Jednotková cena se nemění".

Řešení: Vypíšeme si údaje a zapíšeme s jejich pomocí zachování poměru. Ze získané rovnice vypočteme hledanou veličinu.

Nepřímá úměrnost

Platí: "Čím více, tím méně."

- Kolikrát se zvětší jedna veličina, tolikrát se zmenší druhá veličina.
- "Celkové množství se nemění".

Řešení: Vypíšeme si údaje a zapíšeme s jejich pomocí zachování celkového množství. Ze získané rovnice vypočteme hledanou veličinu.

Př. 2: Rozhodni, které z následujících dvojic veličin a za jakých podmínek můžeme považovat za přímo nebo nepřímo úměrné.

- a) Velikost strany čtverce a jeho obsah.
- b) Počet zaměstnanců a počet vyrobených výrobků.
- c) Počet hudebníků a délka hrané skladby.
- d) Počet pracovníků a částka vyplacená za mzdy.
- e) Objem látky (například množství vody ve vaně) a její hustota.
- f) Objem látky a její hmotnost.
- g) Objem 1 kg látky a její hustota.

a) Velikost strany čtverce a jeho obsah.

Nejde o přímou úměrnost. Čtverec o straně 1 m má obsah 1 m^2 , čtverec o straně 2 m má obsah $4 \text{ m}^2 \Rightarrow$ neplatí, že dvojnásobné zvětšení strany znamená dvojnásobné zvětšení obsahu.

b) Počet zaměstnanců a počet vyrobených výrobků.

Jde o přímou úměrnost za předpokladu, že každý zaměstnanec vyrobí stejný počet výrobků.

c) Počet hudebníků a délka hrané skladby.

Nejde o přímou ani nepřímou úměrnost. Délka skladby na počtu interpretů nezávisí.

d) Počet pracovníků a částka vyplacená za mzdy.

Jde o přímou úměrnost za předpokladu, že každý ze zaměstnanců má stejnou mzdu.

e) Objem látky (například množství vody ve vaně) a její hustota.

Nejde o přímou ani nepřímou úměrnost. Množství látky nemá vliv na její hustotu.

f) Objem látky a její hmotnost.

Jde o přímou úměrnost, pokud každý kus látky má stejnou hustotu.

g) Objem 1 kg látky a její hustota.

Jde o nepřímou úměrnost. Čím větší je objem 1 kg látky tím menší je její hustota (tím méně váží 1 m³ této látky).

Pedagogická poznámka: Velká většina žáků udělá chybu v bodě a), protože s velikostí strany roste obsah. Důležité je spočítat konkrétní příklad, že neplatí čím více, tím více, protože například zvětšení strany dvakrát (dvakrát více), znamená čtyřnásobné zvětšení (čtyřikrát více) obsahu.

Př. 3: Pokud lékař vyšetří během ordinační doby 23 pacientů, bude jednoho ošetřovat 12 minut. Kolik pacientů vyšetřil, když na jednoho během stejné ordinační doby zbylo 10 minut?

Nepřímá úměrnost: Čím více pacientů ošetří, tím kratší dobu může každému věnovat.

23 pacientů	...	12 minut
x pacientů	...	10 minut

$$x \cdot 10 = 23 \cdot 12 \quad / : 10 \quad (\text{délka ordinační doby se nemění})$$

$$x = \frac{23 \cdot 12}{10} = 27,6$$

Lékař vyšetřil během ordinační doby 28 pacientů.

Př. 4: Z patnácti hodů na koš se Jana trefuje tak šestkrát. Kolik košů od ní můžeme očekávat ze 40 hodů?

Přímá úměrnost: Čím více hodů, tím více košů.

15 hodů	...	6 košů
40 hodů	...	x košů

$$\frac{x}{40} = \frac{6}{15} \quad / \cdot 40 \quad (\text{pravděpodobnost trefení koše se nemění})$$

$$x = \frac{6}{15} \cdot 40 = 16$$

Ze 40 hodů můžeme u Jany očekávat 16 košů.

Př. 5: Při rychlosti 90 km/h ujede auto na 12 litrů benzínu 180 km. Jak velkou vzdálenost by ujelo na 42 litrů?

Přímá úměrnost: Čím více benzínu, tím větší uražená vzdálenost.

12 litrů	...	180 km
42 litrů	...	x km

$$\frac{x}{42} = \frac{180}{12} \quad / \cdot 42 \quad (\text{vzdálenost ujetá na 1 km se nemění})$$

$$x = \frac{180}{12} \cdot 42 = 630$$

Na 42 litrů benzínu auto ujede 630 km.

Př. 6: Skupina vědců plánovala, že zásoby na 30 dní vyloží v 35 účastnících za 8 hodin. Za jak dlouho vědci zásoby vyložili, když se jich nakonec expedice účastnilo pouze 32? Na jak dlouho zásoby vydržely?

Doba vykládání: Nepřímá úměrnost: čím víc účastníků, tím kratší doba vykládání.

35 účastníků ... 8 hodin

32 účastníků ... x hodin

$$35 \cdot 8 = 32 \cdot x \quad / : 32 \quad (\text{množství vykládaného materiálu se nemění})$$

$$x = \frac{35 \cdot 8}{32} = 8,75$$

Vědci vyloží zásoby za 8,75 hodiny.

Doba, kterou zásoby vydrží: Nepřímá úměrnost: čím víc účastníků, tím kratší doba.

35 účastníků ... 30 dní

32 účastníků ... x dní

$$x \cdot 32 = 35 \cdot 30 \quad / : 32$$

$$x = \frac{35 \cdot 30}{32} = 32,8$$

32 účastníkům zásoby vydrží na téměř 33 dní.

Př. 7: Sedm 3D tiskáren při osmihodinové pracovní době obsluhy vytiskne zakázku za 12 dní. Za jak dlouho dokončí práci šest tiskáren při desetihodinové pracovní době obsluhy?

Dvě úměrnosti:

7 tiskáren ... 8 hodin ... 12 dní

6 tiskáren ... 10 hodin ... x dní

Změna počtu tiskáren: Nepřímá úměrnost: čím více tiskáren, tím kratší doba zhotovení zakázky.

7 tiskáren ... 8 hodin ... 12 dní

6 tiskáren ... 8 hodin ... y dní

$$6 \cdot x = 7 \cdot 12 \quad / : 6$$

$$x = \frac{7 \cdot 12}{6} = 14 \text{ dní}$$

Změna počtu hodin: Nepřímá úměrnost: čím více hodin, tím méně dnů na zhotovení zakázky.

6 tiskáren ... 8 hodin ... 14 dní

6 tiskáren ... 10 hodin ... x dní

$$x \cdot 10 = 8 \cdot 14 \quad / : 10$$

$$x = \frac{8 \cdot 14}{10} = 11,2 \text{ dne}$$

Šest tiskáren dokončí zakázku při desetihodinové pracovní době obsluhy za 11,2 dne.

Dodatek: Výraz můžeme sestavit také úvahou najednou $x = \frac{7 \cdot 8}{6 \cdot 10} \cdot 12 = 11,2$.

Shrnutí: Délka strany čtverce a jeho obsah nejsou přímo úměrné.