

3.1.15 Umocňování pomocí vzorce

Předpoklady: 030114

Př. 1: Vypočti.

a) $(a+2)(2a-3)$ b) $(3a-3)(2x+1)$ c) $(3c+2d)^2$

a) $(a+2)(2a-3) = 2a^2 - 3a + 4a - 6 = 2a^2 + a - 6$

b) $(3a-3)(2x+1) = 6ax + 3a - 6x - 3$

c) $(3c+2d)^2 = (3c+2d)(3c+2d) = 9c^2 + 6cd + 6cd + 4d^2 = 9c^2 + 12cd + 4d^2$

3. příklad z minulé hodiny:

- a) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- b) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
- c) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
- d) $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Poslední bod dnešního posledního příkladu: $(3c+2d)^2 = 9c^2 + 12cd + 4d^2$

Ve všech případech je výsledek podobný, obsahuje druhou mocninu prvního i druhého členu v umocňované závorce a dvojnásobek jejich součinu.

Druhá mocnina součtu dvou členů se rovná součtu druhé mocniny prvního členu, druhé mocniny druhého členu a dvojnásobku součinu prvního členu s druhým členem.

Předchozí pravidlo daleko snáze zapíšeme pomocí písmenek: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Písmenka nám pomohou i při jeho odvození:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Druhou mocninu dvojčlenu můžeme rychle vypočítat pomocí vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Př. 2: Najdi v rovnosti $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ členy z obecného vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Napíšeme obě rovnosti pod sebe:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A vidíme, že platí:

- $a = x$,
- $b = 3$,
- $a^2 = x^2$ (tak už to musí být),
- $2ab = 6x = 2 \cdot x \cdot 3$ (tak už to musí být),
- $b^2 = 9 = 3^2$ (tak už to musí být).

Př. 3: Najdi v rovnosti $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$ členy z obecného vzorce
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Napišeme obě rovnosti pod sebe:

$$(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A vidíme, že platí:

- $a = 3x$,
- $b = 2$,
- $a^2 = 9x^2 = (3x)^2$ (tak už to musí být),
- $2ab = 12x = 2 \cdot 3x \cdot 2$ (tak už to musí být),
- $b^2 = 4 = 2^2$ (tak už to musí být).

Př. 4: Vypočti druhé mocniny dosazením do vzorce.

a) $(x+1)^2$ b) $(x+3)^2$ c) $(2x+1)^2$ d) $(3x+2)^2$

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

c) $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$

d) $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Př. 5: Vypočti druhé mocniny dosazením do vzorce.

a) $(3a+1)^2$ b) $(5a+2b)^2$ c) $(2x^2+3)^2$ d) $(a-b)^2$

a) $(3a+1)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 1 + 1^2 = 9a^2 + 6a + 1$

b) $(5a+2b)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 2b + (2b)^2 = 25a^2 + 20ab + 4b^2$

c) $(2x^2+3)^2 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 3 + 3^2 = 4x^4 + 12x^2 + 9$

d) $(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Poslední bod předchozího příkladu je důležitý ze dvou důvodů:

- ukazuje, jak si v matematice můžeme pomáhat tím, že si "napíšeme věci, jak potřebujeme" (potřebovali jsme ve vzorci +, tak jsme si přepsali $-b = +(-b)$),
- používá se jako další vzorec pro umocňování dvojčlenů: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Př. 6: Vypočti pomocí vzorce.

a) $(x-4)^2$ b) $(3a-2)^2$ c) $(7a-3b)^2$ d) $\left(2x-\frac{y}{2}\right)^2$

a) $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$

b) $(3a-2)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2 + 2^2 = 9a^2 - 12a + 4$

c) $(7a-3b)^2 = 49a^2 - 42ab + 9b^2$

d) $\left(2x-\frac{y}{2}\right)^2 = 4x^2 - xy + \frac{y^2}{4}$

Př. 7: Vypočti.

a) $(2x+1)^2 + (x-7)(x+3)$

b) $(2a+5)^2 - (2a+3)(a-7)$

c) $(a+2b)^2 - (a-2b)^2$

d) $(5a+7)^2 + (7a+5)^2$

a) $(2x+1)^2 + (x-7)(x+3) = 4x^2 + 4x + 1 + x^2 + 3x - 7x - 21 = 5x^2 - 20$

b) $(2a+5)^2 - (2a+3)(a-7) = 4a^2 + 20a + 25 - (2a^2 - 14a + 3a - 21) = 2a^2 + 31a + 46$

c) $(a+2b)^2 - (a-2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - (a^2 - 4ab + 4b^2) = 8ab$

d) $(5a+7)^2 + (7a+5)^2 = 25a^2 + 70a + 49 + 49a^2 + 70a + 25 = 74a^2 + 140a + 74$

Př. 8: Ve schématu platí následující pravidla počítání:

Číslo v rámečku Start (označené oválem) a číslo, které přičítáme (označené kolečkem), můžeme volit libovolně.

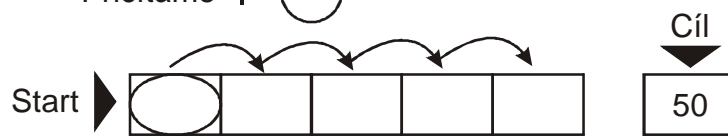
Čísla v dalších čtyřech čtverečcích v řádku získáte postupným přičítáním "přičítaného" čísla.

Čísla ve všech pěti čtverečcích v řádku sečtete a dostanete tak "cílové" číslo.

Která přirozená čísla zvolíte jako "počáteční" a "přičítané", abyste dostali "cílové"

číslo 50?

Přičítáme + ○



Shrnutí: Umocňování můžeme urychlit pomocí vzorců.