

3.2.2 Výrazy s proměnou I

Předpoklady: 030201

Pedagogická poznámka: Tato hodina může proběhnout dvojitým způsobem. Pokud se při kontrole příkladu 2 neobjeví rozdíly ve výsledcích (nepravděpodobné), můžete projít celý zbytek hodiny. Pokud se rozdíly objeví, je možné vyvolat diskusi, která je přibližně popsána za řešením příkladu 2 a kterou považuji za velmi užitečnou. Nejdůležitější v následné diskusi je problém roznásobování závorek v součinu, který se u slabších žáků běžně táhne až k maturitě.

Př. 1: Verča chystá oslavu narozenin. Zatím neví, kolik lidí přijde, ale chce si udělat představu, kolik bude čeho potřebovat, a proto vše zapisuje pomocí čísla n . Zapiš stejně jako ona pomocí písmena n kolik bude potřeba:

- rohlíků, pokud každý účastník sní dva,
- lahví Kolalokovy limonády, pokud jedna vystačí pro čtyři účastníky,
- talířků na dort, kdy chce mít pro všechny dohromady dva náhradní,
- stojanů na kola, když určitě čtyři hosté přijdou pěšky.

a) rohlíků, pokud každý účastník sní dva: $2n$,

b) lahví Kolalokovy limonády, pokud jedna vystačí pro čtyři účastníky: $\frac{n}{4}$,

c) talířků na dort, kdy chce mít pro všechny dohromady dva náhradní: $n + 2$,

d) stojanů na kola, když určitě čtyři hosté přijdou pěšky: $n - 4$.

Př. 2: Ještě než začneš psát výsledky, rozmysli si přehledný způsob zápisu do sešitu. Strana čtverce má délku a cm. Urči jeho obvod a obsah. Urči délku strany, obvod a obsah čtverce, jehož strana je:

- o 1 cm delší
- o 3 cm kratší
- dvakrát delší
- tříkrát kratší.

Máme několik různých délek stran čtverce a u každé máme určit obvod a obsah \Rightarrow výsledky můžeme zapisovat do tabulky.

| strana | obvod | obsah |
|---------------|---|--|
| a | $4 \cdot a = 4a$ | $a \cdot a = a^2$ |
| $a + 1$ | $4(a + 1) = 4a + 4$ | $(a + 1)(a + 1) = (a + 1)^2$ |
| $a - 3$ | $4(a - 3) = 4a - 12$ | $(a - 3)(a - 3) = (a - 3)^2$ |
| $2a$ | $4 \cdot (2a)$ | $(2a)^2 = 4a^2$ |
| $\frac{a}{3}$ | $4 \cdot \frac{a}{3} = \frac{4a}{3} = \frac{4}{3}a$ | $\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$ |

Pedagogická poznámka: Při kontrole na tabuli nechám žáky zapsat výsledky na tabuli, pak si tabulku procházíme a pokud má někdo jiný výsledek nahlásí ho. Společně pak

rozhodujeme, které z nich mohou být správné. Snažím se, aby si žáci procvičili dosazování (jedna z metod, jak rozhodnout, který výsledek je správný) a došli k tomu, že je užitečné umět počítat i s písmenky.

Více možností u některých výsledků. Největší rozdíly u obvodu čtverce s délkou strany $2a$:

- $4 \cdot (2a)$,
- $4 \cdot 2a$,
- $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a$,
- $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot a = 8a$,
- $32a$,
- ...

Všechny možnosti nemohou být správné (některé si na první pohled odporují – například $8a$ a $16a$) \Rightarrow jak rozhodnout, které jsou správné?

Nejjistější ze všech výsledků: $4 \cdot (2a)$.

Dosadíme $a = 2$ (malé číslo, ale ne 1): $4 \cdot (2a) = 4 \cdot (2 \cdot 2) = 4 \cdot 4 = 16$.

Kontrola: Čtverec o straně $2a = 2 \cdot 2 = 4$ má obvod $4 \cdot 4 = 16$.

Nyní dosadíme stejnou hodnotu do ostatních výsledků. Výrazy, u kterých vyjde jiná hodnota než 16, jsou určitě špatné (u správného výrazu musí vyjít stejná hodnota při dosazení libovolného čísla).

- $4 \cdot 2a = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$,
- $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ (čtyřikrát víc než správný výsledek),
- $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot a = 8a = 8 \cdot 2 = 16$,
- $32a = 32 \cdot 2 = 64$ (opět čtyřikrát víc než správný výsledek),

Kde se stala chyba?

Porovnáme druhý a třetí řádek (odstranění závorky):

- špatně: $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a$,
- dobře: $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot a$.

Proč se při odstraňování závorky, která obsahuje násobení, nenapíše číslo před závorkou před obě čísla uvnitř závorky jako při roznásobování závorek se sčítáním?

Roznásobování závorky se sčítáním $2(b+3)$:

- $b+3$ dáváme dohromady neznámý počet b a tří,
- $2(b+3)$ vytvořenou skupinu $b+3$ máme dvakrát \Rightarrow máme dvakrát jak neznámé číslo b , tak číslo 3 \Rightarrow máme $2 \cdot b + 2 \cdot 3 = 2b + 6$ (museli jsme vynásobit obě čísla uvnitř závorky, závorka měla význam, bez ní bychom násobili dvěma pouze neznámé číslo b).

Odstraňování závorky s násobením $4 \cdot (2a)$:

- $2a$ máme délku tvořenou dvěma úseky o délce a ,

- $4 \cdot (2a)$ délka ze dvou úseků o délce a se opakuje čtyřikrát \Rightarrow celková délka je celkem 8 úseků o délce a , tedy $8a$.

Další dobré důvody proč neroznásobovat závorku ve výrazu $4 \cdot (2a)$:

- závorka ve výrazu $4 \cdot (2a)$ nemá žádný význam (neobsahuje sčítání, které může díky závorce přeskočit prioritu násobení) \Rightarrow můžeme ji vypustit $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot a = 8a$,
- násobení je asociativní (nezáleží na uzávorkování): $4 \cdot (2a) = (4 \cdot 2) \cdot a = 8a$.

Závorky, které můžeme vypustit, neroznásobujeme.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je vyrovnávací, nedělají ho všichni, upravování výrazů vůbec neřešíme.

- Př. 3:** Kratší strana obdélníku má délku a , delší strana má délku b . Urči obsah a obvod obdélníku. Urči délky stran, obvod a obsah, pokud
- kratší stranu o 1 cm prodloužíme a delší o dva zkrátíme,
 - kratší stranu dvakrát zmenšíme a delší dvakrát prodloužíme,
 - kratší stranu o polovinu zvětšíme a delší o třetinu zmenšíme.

Podobně jako v předchozím příkladu zapíšeme výsledky do tabulky.

| kratší strana | delší strana | obvod | obsah |
|----------------------------------|----------------------------------|---|--|
| a | b | $2a + 2b = 2(a + b)$ | ab |
| $a + 1$ | $b - 2$ | $2(a + 1) + 2(b - 2) = 2a + 2b - 2$ | $(a + 1)(b - 2)$ |
| $\frac{a}{2}$ | $2b$ | $2 \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot 2b = a + 4b$ | $\frac{a}{2} \cdot 2b = ab$ |
| $a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$ | $b - \frac{b}{3} = \frac{2}{3}b$ | $2 \cdot \frac{3}{2}a + 2 \cdot \frac{2}{3}b = 3a + \frac{4}{3}b$ | $\frac{3}{2}a \cdot \frac{2}{3}b = ab$ |

- Př. 4:** Petrovi je p let. Zapiš kolik let je: a) Tomášovi, který je o 2 roky starší, b) Štěpánce, která je třikrát starší, c) Šimonovi, který je o pět let mladší, d) Luce, jejíž věk jsou tři čtvrtiny věku Petra, e) Mírovi, který je o třetinu starší než Petr, f) Frantovi, který je o dvacet procent mladší než Petr, g) Markétě, která je dvakrát starší než Šimon, h) Majdě, která je o pět let starší než Štěpánka.

a) Tomášovi, který je o 2 roky starší: $p + 2$,

b) Štěpánce, která je třikrát starší: $3p$,

c) Šimonovi, který je o pět let mladší: $p - 5$,

d) Luce, jejíž věk jsou tři čtvrtiny věku Petra: $\frac{3}{4}p$,

e) Mírovi, který je o třetinu starší než Petr $p + \frac{p}{3} = \frac{3p + p}{3} = \frac{4p}{3} = \frac{4}{3}p$,

f) Frantovi, který je o dvacet procent mladší než Petr: Frantův věk je 80 % věku Petra \Rightarrow

$0,8p$,

g) Markétě, která je dvakrát starší než Šimon: $2(p-5)$,

h) Majdě, která je o pět let starší než Štěpánka: $3p+5$.

Pedagogická poznámka: Problémy jsou mimo body e), f) výjimečné. Bod f) je možné odvodit samozřejmě i pomocí přímé úměry:

$$\begin{array}{lll} 100 \% & \dots & p \\ 80 \% & \dots & x \end{array}$$

$$\frac{x}{p} = \frac{80}{100} \quad | \cdot p$$

$$x = \frac{80}{100} p = 0,8p$$

Pedagogická poznámka: Ve škole stihneme z následujícího příkladu tak první bod, zbytek je za domácí úkol.

Př. 5: Vypočti. Vyčísluj pomalu a pozorně opisuj.

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[2 - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] \qquad \text{b) } 2 - \{ 3 - 6 \cdot [3 + 4 \cdot 2 - (2 \cdot 3 + 1)] \}$$

$$\text{c) } [4 - 3^2 \cdot \sqrt{3 + 2(15 - 4)}] \cdot 2 - \{ 2 - [5 - 4 \cdot 3(2 \cdot 4 - 6) + 2] \cdot 2 \}$$

a)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[2 - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] &= \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} \right) \cdot \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[2 - 3 \cdot \frac{2}{3} \right] = \\ &= 1 - \frac{2}{3} \cdot [2 - 2] = 1 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2 - \{ 3 - 6 \cdot [3 + 4 \cdot 2 - (2 \cdot 3 + 1)] \} &= 2 - \{ 3 - 6 \cdot [3 + 8 - 7] \} = 2 - \{ 3 - 6 \cdot 4 \} = 2 - \{ 3 - 24 \} = \\ &= 2 - \{ -21 \} = 23 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} [4 - 3^2 \cdot \sqrt{3 + 2(15 - 4)}] \cdot 2 - \{ 2 - [5 - 4 \cdot 3(2 \cdot 4 - 6) + 2] \cdot 2 \} &= \\ [4 - 9 \cdot \sqrt{3 + 2 \cdot 11}] \cdot 2 - \{ 2 - [5 - 4 \cdot 3 \cdot 2 + 2] \cdot 2 \} &= \\ [4 - 9 \cdot 5] \cdot 2 - \{ 2 - [-17] \cdot 2 \} &= (-41) \cdot 2 - (2 + 34) = \\ -82 - 36 &= -118 \end{aligned}$$

Shrnutí: Závorky, které můžeme vypustit, neroznásobujeme.