

3.2.2 Výrazy s proměnou I

Předpoklady: 030201

Př. 1: Vypočti.

a) $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$

b) $\sqrt{27+9} \cdot 2^3$

c) $3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 4$

a) $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$

b) $\sqrt{27+9} \cdot 2^3 = \sqrt{36} \cdot 8 = 6 \cdot 8 = 48$

c) $3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 4 = 3 - 15 + 16 + 4 = 8$

Pedagogická poznámka: Tato hodina může proběhnout dvojím způsobem. Pokud se při kontrole příkladu 2 neobjeví rozdíly ve výsledcích (nepravděpodobné), můžete projít celý zbytek hodiny. Pokud se rozdíly objeví, je možné vyvolat diskusi, která je přibližně popsána za řešením příkladu 2 a kterou považuji za velmi užitečnou. Nejdůležitější v následné diskusi je problém roznásobování závorek v součinu, který se u slabších žáků běžně táhne až k maturitě. Příklad 4 je vyrovňovací. 5 by měli udělat všichni.

Př. 2: Verča chystá oslavu narozenin. Zatím neví, kolik lidí přijde, ale chce si udělat představu, kolik bude čeho potřebovat, a proto vše zapisuje pomocí čísla n . Zapiš stejně jako ona pomocí písmena n , kolik bude potřeba:

a) rohlíků, pokud každý účastník sní dva,

b) lahví Kolařokovy limonády, pokud jedna vystačí pro čtyři účastníky,

c) talířků na dort, kdy chce mít pro všechny dohromady dva náhradní,

d) stojanů na kola, když určitě čtyři hosté přijdou pěšky.

a) rohlíků, pokud každý účastník sní dva: $2n$,

b) lahví Kolařokovy limonády, pokud jedna vystačí pro čtyři účastníky: $\frac{n}{4}$,

c) talířků na dort, kdy chce mít pro všechny dohromady dva náhradní: $n + 2$,

d) stojanů na kola, když určitě čtyři hosté přijdou pěšky: $n - 4$.

Př. 3: Strana čtverce má délku a cm. Urči jeho obvod a obsah. Urči délku strany, obvod a obsah čtverce, jehož strana je:

a) o 1 cm delší

b) o 3 cm kratší

c) dvakrát delší

d) třikrát kratší.

Výsledky zapisuj jako pokračování následující tabulky. Snaž se kromě výsledků obsahujících závorky uvádět i upravené verze bez závorek.

strana	obvod	obsah
a	$4 \cdot a = 4a$	$a \cdot a = a^2$

strana	obvod	obsah
a	$4 \cdot a = 4a$	$a \cdot a = a^2$
$a+1$	$4(a+1) = 4a+4$	$(a+1)(a+1) = (a+1)^2$
$a-3$	$4(a-3) = 4a-12$	$(a-3)(a-3) = (a-3)^2$
$2a$	$4 \cdot (2a)$	$(2a)^2 = 4a^2$
$\frac{a}{3}$	$4 \cdot \frac{a}{3} = \frac{4a}{3} = \frac{4}{3}a$	$\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$

Pedagogická poznámka: Při kontrole na tabuli nechám žáky zapsat výsledky na tabuli, pak si tabulku procházíme, a pokud má někdo jiný výsledek, nahlásí ho. Společně pak rozhodujeme, které z nich mohou být správné. Snažím se, aby si žáci procvičili dosazování (jedna z metod, jak rozhodnout, který výsledek je správný) a došli k tomu, že je užitečné umět počítat i s písmenky.

Více možností u některých výsledků. Největší rozdíly u obvodu čtverce s délkou strany $2a$:

- $4 \cdot (2a)$,
- $4 \cdot 2a$,
- $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a$,
- $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot a = 8a$,
- $32a$,
- ...

Všechny možnosti nemohou být správné (některé si na první pohled odporují – například $8a$ a $16a$) \Rightarrow jak rozhodnout, které jsou v pořádku?

Nejjistější ze všech výsledků: $4 \cdot (2a)$.

Dosadíme $a = 2$ (malé číslo, ale ne 1): $4 \cdot (2a) = 4 \cdot (2 \cdot 2) = 4 \cdot 4 = 16$.

Kontrola: Čtverec o straně $2a = 2 \cdot 2 = 4$ má obvod $4 \cdot 4 = 16$.

Nyní dosadíme stejnou hodnotu do ostatních výsledků. Výrazy, u kterých vyjde jiná hodnota než 16, jsou určitě špatné (u správného výrazu musí vyjít stejná hodnota při dosazení libovolného čísla).

- $4 \cdot 2a = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$,
- $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ (čtyřikrát víc než správný výsledek),
- $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot a = 8a = 8 \cdot 2 = 16$,
- $32a = 32 \cdot 2 = 64$ (opět čtyřikrát víc než správný výsledek),

Kde se stala chyba?

Porovnáme druhý a třetí řádek (odstranění závorky):

- špatně: $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a$,
- dobře: $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot a$.

Proč se při odstraňování závorčky, která obsahuje násobení, nenapíše číslo před závorečkou před obě čísla uvnitř závorčky jako při roznásobování závorek se sčítáním?

Roznásobování závorčky se sčítáním $2(b+3)$:

- $b+3$ dáváme dohromady neznámý počet b a tří,
- $2(b+3)$ vytvořenou skupinu $b+3$ máme dvakrát \Rightarrow máme dvakrát jak neznámé číslo b , tak číslo 3 \Rightarrow máme $2 \cdot b + 2 \cdot 3 = 2b + 6$ (museli jsme vynásobit obě čísla uvnitř závorčky, závorčka měla význam, bez ní bychom násobili dvěma pouze neznámé číslo b).

Odstraňování závorčky s násobením $4 \cdot (2a)$:

- $2a$ máme délku tvořenou dvěma úseky o délce a ,
- $4 \cdot (2a)$ délka ze dvou úseků o délce a se opakuje čtyřikrát \Rightarrow celková délka je celkem 8 úseků o délce a , tedy $8a$.

Další dobré důvody proč neroznásobovat závorčku ve výrazu $4 \cdot (2a)$:

- závorčka ve výrazu $4 \cdot (2a)$ nemá žádný význam (neobsahuje sčítání, které může díky závorčce přeskočit prioritu násobení) \Rightarrow můžeme ji vypustit $4 \cdot (2a) = 4 \cdot 2 \cdot a = 8a$,
- násobení je asociativní (nezáleží na uzávorkování): $4 \cdot (2a) = (4 \cdot 2) \cdot a = 8a$.

Závorky, které můžeme vypustit, neroznásobujeme.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je vyrovňovací, nedělají ho všichni, upravování výrazů vůbec neřešíme.

Př. 4: Kratší strana obdélníku má délku a , delší strana má délku b . Urči obsah a obvod obdélníku. Urči délky stran, obvod a obsah, pokud
 a) kratší stranu o 1 cm prodloužíme a delší o dva zkrátíme,
 b) kratší stranu dvakrát zmenšíme a delší dvakrát prodloužíme,
 c) kratší stranu o polovinu zvětšíme a delší o třetinu zmenšíme.
 Ještě než příklad vyřešíš, odhadni, v kterém z bodů bude obvod nebo obsah stejný jako u původního obdélníku o stranách a, b .

Podobně jako v předchozím příkladu zapíšeme výsledky do tabulky.

kratší strana	delší strana	obvod	obsah
a	b	$2a + 2b = 2(a + b)$	ab
$a + 1$	$b - 2$	$2(a + 1) + 2(b - 2) = 2a + 2b - 2$	$(a + 1)(b - 2)$
$\frac{a}{2}$	$2b$	$2 \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot 2b = a + 4b$	$\frac{a}{2} \cdot 2b = ab$
$a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$	$b - \frac{b}{3} = \frac{2}{3}b$	$2 \cdot \frac{3}{2}a + 2 \cdot \frac{2}{3}b = 3a + \frac{4}{3}b$	$\frac{3}{2}a \cdot \frac{2}{3}b = ab$

- Př. 5:** Petrovi je p let. Zapiš kolik let je: a) Tomášovi, který je o 2 roky starší,
 b) Štěpánce, která je třikrát starší, c) Šimonovi, který je o pět let mladší,
 d) Lucce, jejíž věk jsou tři čtvrtiny věku Petra,
 e) Mírovi, který je o třetinu starší než Petr,
 f) Frantovi, který je o dvacet procent mladší než Petr,
 g) Markétě, která je dvakrát starší než Šimon,
 h) Majdě, která je o pět let starší než Štěpánka.

- a) Tomášovi, který je o 2 roky starší: $p + 2$,
 b) Štěpánce, která je třikrát starší: $3p$,
 c) Šimonovi, který je o pět let mladší: $p - 5$,
 d) Lucce, jejíž věk jsou tři čtvrtiny věku Petra: $\frac{3}{4}p$,
 e) Mírovi, který je o třetinu starší než Petr $p + \frac{p}{3} = \frac{3p + p}{3} = \frac{4p}{3} = \frac{4}{3}p$,
 f) Frantovi, který je o dvacet procent mladší než Petr: Frantův věk je 80 % věku Petra $\Rightarrow 0,8p$,
 g) Markétě, která je dvakrát starší než Šimon: $2(p - 5)$,
 h) Majdě, která je o pět let starší než Štěpánka: $3p + 5$.

Pedagogická poznámka: Problémy jsou mimo body e), f) výjimečné. Bod f) je možné odvodit samozřejmě i pomocí přímé úměry:

$$\begin{array}{l} 100 \% \quad \dots \quad p \\ 80 \% \quad \dots \quad x \\ \frac{x}{p} = \frac{80}{100} \quad | \cdot p \\ x = \frac{80}{100} p = 0,8p \end{array}$$

Pedagogická poznámka: Ve škole stihneme z následujícího příkladu tak první bod, zbytek je za domácí úkol.

Př. 6: Vypočti. Vyčísluj pomalu a pozorně opisuj.

- a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[2 - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$ b) $2 - \{3 - 6 \cdot [3 + 4 \cdot 2 - (2 \cdot 3 + 1)]\}$
 c) $\left[4 - 3^2 \cdot \sqrt{3 + 2(15 - 4)}\right] \cdot 2 - \{2 - [5 - 4 \cdot 3(2 \cdot 4 - 6) + 2] \cdot 2\}$

a)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[2 - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] &= \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \cdot \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[2 - 3 \cdot \frac{2}{3}\right] = \\ &= 1 - \frac{2}{3} \cdot [2 - 2] = 1 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

b)

$$2 - \{3 - 6 \cdot [3 + 4 \cdot 2 - (2 \cdot 3 + 1)]\} = 2 - \{3 - 6 \cdot [3 + 8 - 7]\} = 2 - \{3 - 6 \cdot 4\} = 2 - \{3 - 24\} = \\ = 2 - \{-21\} = 23$$

c)

$$\left[4 - 3^2 \cdot \sqrt{3 + 2(15 - 4)}\right] \cdot 2 - \{2 - [5 - 4 \cdot 3(2 \cdot 4 - 6) + 2]\} \cdot 2 = \\ \left[4 - 9 \cdot \sqrt{3 + 2 \cdot 11}\right] \cdot 2 - \{2 - [5 - 4 \cdot 3 \cdot 2 + 2]\} \cdot 2 = \\ \left[4 - 9 \cdot 5\right] \cdot 2 - \{2 - [-17]\} \cdot 2 = (-41) \cdot 2 - (2 + 34) = \\ -82 - 36 = -118$$

Shrnutí: Závorky, které můžeme vypustit, neroznásobujeme.