

### 3.2.3 Výrazy s proměnnou II

**Předpoklady:** 030202

**Př. 1:** Vypočti.

a)  $\left\{2 - \left[3 + 4\sqrt{7 - (5 - 2)} + (-2) \cdot 3\right] + 2 \cdot 3\right\} - 2(-3)$

b)  $(5 - 3)^2 \cdot \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 8} + 2[4 - (7 - 10) \cdot 3](-2)(5 - 7)$

a)

$$\left\{2 - \left[3 + 4\sqrt{7 - (5 - 2)} + (-2) \cdot 3\right] + 2 \cdot 3\right\} - 2(-3) =$$

$$\left\{2 - [3 + 4 \cdot 2 - 6] + 6\right\} + 6 =$$

$$\{2 - 5 + 6\} + 6 = 9$$

b)

$$(5 - 3)^2 \cdot \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 8} + 2[4 - (7 - 10) \cdot 3](-2)(5 - 7) =$$

$$2^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} + 2[4 - (-3) \cdot 3](-2)(-2) =$$

$$4 \cdot 12 + 2[4 + 9] \cdot 4 = 48 + 8 \cdot 13 = 48 + 104 = 152$$

**Pedagogická poznámka:** Bod a) spočtu (stejným způsobem jako v učebnici - tedy pod sebe) pro kontrolu na tabuli a žáci, kteří nemají správný výsledek, hledají chybu. To samé pak doma dělají s bodem b), u kterého si říkáme pouze výsledek. V další hodině pak kontrolují, zda si opravu udělali.

**Dodatek:** Správnost výsledků je možné zkontrolovat například pomocí portálu [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com), zadáním výrazu

a)  $(2 - (3 + 4 \cdot \text{sqrt}(7 - (5 - 2))) + (-2) \cdot 3) + 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-3)$

b)  $(5 - 3)^2 \cdot \text{sqrt}(6 \cdot 3 \cdot 8) + 2 \cdot (4 - (7 - 10) \cdot 3) \cdot (-2) \cdot (5 - 7)$ .

**Pedagogická poznámka:** Když žákům ukazují kontrolu přes wolframalpha, ptám se, co znamená zkratka sqrt. Víc to v tomto okamžiku neřešíme, zacházet se s tím budeme učit později.

**Př. 2:** Cena zaplacená za odvoz taxíkem se skládá ze dvou částí - kromě ceny za ujetý kilometr se platí ještě nástupní taxa.

a) Napiš výraz, který udává cenu za taxi firmy Škrabi s nástupní cenou 40 Kč a platbou 20 Kč za kilometr. Počet kilometrů označ  $n$ .

b) Spočti, kolik zaplatíš, pokud bude cesta dlouhá: I) 2 km II) 8 km.

c) Jak daleko se můžeš nechat svézt firmou Škrabi, pokud máš posledních 85 Kč?

a) Cena za taxi firmy Škrabi s nástupní cenou 40 Kč a platbou 20 Kč za kilometr:  $40 + 20n$ .

b) Spočti, kolik zaplatíš, pokud bude cesta dlouhá:

- 2 km:  $40 + 20n = 40 + 20 \cdot 2 = 80$  Kč,

- 8 km:  $40 + 20n = 40 + 20 \cdot 8 = 200$  Kč.

c) Jak daleko se můžeš nechat svézt firmou Škrabi, pokud máš posledních 85 Kč?

$$40 + 20n = 85 \quad / -40$$

$$20n = 45 \quad / : 20$$

$$n = \frac{45}{20} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Za posledních 85 Kč se můžeme nechat svézt o 2,25 km.

**Pedagogická poznámka:** Žáci většinou neřeší bod c) rovnicí, právě proto píšu tento způsob řešení na tabuli.

Trochu terminologie:

Výraz	Dosazení do výrazu	Hodnota výrazu
$40 + 20n$	$40 + 20 \cdot 2$	80
$40 + 20n$	$40 + 20 \cdot 8$	200

Často říkáme: Hodnota výrazu  $40 + 20n$  pro  $n = 2$  je 80 Kč.

**Př. 3:** Vstupné pro dospělé osobu (plná cena) na hrad stojí 80 Kč, snížené vstupné pro děti a důchodce je 50 Kč.

a) Zapiš výraz, který udává částku zaplacenou  $p$  dospělými a  $d$  dětmi.

b) Kolik celkem zaplatí návštěvníci v jedné skupině s 12 dospělými a 8 dětmi?

c) Ve skupině může být maximálně 30 osob. Kolik je možné maximálně vybrat na vstupném ve skupině s 10 dětmi?

a) Zapiš výraz, který udává částku zaplacenou  $p$  dospělými a  $d$  dětmi:  $80p + 50d$ .

b) Kolik celkem zaplatí návštěvníci v jedné skupině s 12 dospělými a 8 dětmi?

$$80p + 50d = 80 \cdot 12 + 50 \cdot 8 = 960 + 400 = 1360 \text{ Kč}$$

Skupina s 12 dospělými a 8 dětmi zaplatí celkem 1360 Kč.

c) Ve skupině může být maximálně 30 osob. Kolik je možné maximálně vybrat na vstupném ve skupině s 10 dětmi?

10 dětí  $\Rightarrow$  ve skupině může být 20 dospělých.

$$80p + 50d = 80 \cdot 20 + 50 \cdot 10 = 1600 + 500 = 2100 \text{ Kč.}$$

Pokud je ve skupině 10 dětí, je možné od ní vybrat maximálně 2100 Kč.

**Př. 4:** Internetový obchod poskytuje stálým a častým zákazníkům slevy ve formě slevových karet: bronzová představuje slevu 2 % z konečné ceny, stříbrná 5 % a zlatá 10 %. Zapiš co nejjednodušším výrazem (neobsahujícím znak procent), kolik zaplatí držitelé jednotlivých karet, pokud chtějí nakoupit zboží za konečnou cenu  $n$  Kč pro normálního zákazníka.

Bronzová karta

$$\text{Sleva } 2\% \Rightarrow \text{sleva } \frac{2}{100}n \Rightarrow \text{zákazník zaplatí } n - \frac{2}{100}n = \frac{100n - 2n}{100} = \frac{98n}{100} = 0,98n.$$

Jiný přístup:

Sleva 2 % =  $\Rightarrow$  zákazník platí 98 %.

$$\begin{array}{lcl} 100 \% & \dots & n \\ 98 \% & \dots & x \end{array}$$

$$\frac{x}{n} = \frac{98}{100} \quad | \cdot n$$

$$x = \frac{98}{100} \cdot n = 0,98n$$

Zákazník s bronzovou kartou zaplatí  $0,98n$ .

Stříbrná karta

Sleva 5 % =  $\Rightarrow$  zákazník platí 95 %.

$$\begin{array}{lcl} 100 \% & \dots & n \\ 95 \% & \dots & x \end{array}$$

$$\frac{x}{n} = \frac{95}{100} \quad | \cdot n$$

$$x = \frac{95}{100} \cdot n = 0,95n$$

Zákazník se stříbrnou kartou zaplatí  $0,95n$ .

Zlatá karta

Sleva 10 % =  $\Rightarrow$  zákazník platí 90 %  $\Rightarrow$  platí  $0,9n$ .

Zákazník se zlatou kartou zaplatí  $0,9n$ .

**Pedagogická poznámka:** Řešení předchozího příkladu je opět dobrou ukázkou toho, že je třeba umět počítat i s výrazy, které obsahují proměnné.

**Př. 5:** Ve většině evropských zemí se daň z příjmů platí v takzvaném progresivním systému, kdy jsou různé vysoké příjmy daněny různou sazbou. Například pokud jsou pásma 0 – 300 000 Kč 15% a 300 000 – 1 000 000 20% a nad 1 000 000 25 %, platí zaměstnanec s příjmem 500 000 Kč 15 % z 300 000 Kč a 20 % ze zbytku svého příjmu (tedy z 200 000 Kč).

- Urči, kolik Kč zaplatí na dani zaměstnanec s příjmem 500 000 Kč.
- Urči, kolik Kč zaplatí na dani zaměstnanec s příjmem 1 200 000 Kč.
- Napiš výraz, který udává, kolik zaplatí na dani zaměstnanec s příjmem  $k$  Kč, pokud víš, že  $k$  je větší než 1 000 000 Kč.
- Najdi podobné výrazy jako v bodě c) pro příjmy  $k$  nižší než 1 000 000 Kč. Využij všechny nalezené vzorce k sestavení jednoduššího postupu pro výpočet daně než je uveden v zadání. Zkontroluj, zda tento postup funguje pro určení daně v bodech a) a b).

Pásma zdanění:

0 - 300 000:	15 %,
300 000 - 1 000 000:	20 %,
1 000 000 a více:	25 %.

a) Urči, kolik Kč zaplatí na dani zaměstnanec s příjmem 500 000 Kč.  
500 000:

- 15 % z 300 000:  $300\,000 \cdot 0,15 = 45\,000$  Kč,
- 20 % z  $500\,000 - 300\,000 = 200\,000$ :  $200\,000 \cdot 0,20 = 40\,000$  Kč.

Z ročního příjmu 500 000 Kč zaplatí poplatník na dani 85 000 Kč.

b) Urči, kolik Kč zaplatí na dani zaměstnanec s příjmem 1 200 000 Kč.  
500 000:

- 15 % z 300 000:  $300\,000 \cdot 0,15 = 45\,000$  Kč,
- 20 % z  $1\,000\,000 - 300\,000 = 700\,000$ :  $700\,000 \cdot 0,20 = 140\,000$  Kč,
- 25 % z  $1\,200\,000 - 1\,000\,000 = 200\,000$ :  $200\,000 \cdot 0,25 = 50\,000$  Kč.

Z ročního příjmu 1 200 000 Kč zaplatí poplatník na dani 235 000 Kč.

c) Napiš výraz, který udává, kolik zaplatí na dani zaměstnanec s příjmem  $k$  Kč, pokud víš, že  $k$  je větší než 1 000 000 Kč. Výraz uprav a urči s jeho pomocí daň pro příjem 1 200 000 Kč.  
 $k > 1\,000\,000$ :

- 15 % z 300 000:  $300\,000 \cdot 0,15 = 45\,000$  Kč,
- 20 % z  $1\,000\,000 - 300\,000 = 700\,000$ :  $700\,000 \cdot 0,20 = 140\,000$  Kč,
- 25 % z  $k - 1\,000\,000$ :  
 $(k - 1\,000\,000) \cdot 0,25 = 0,25k - 1\,000\,000 \cdot 0,25 = 0,25k - 250\,000$  Kč.

Celková daň.  $45\,000 + 140\,000 + 0,25k - 250\,000 = 0,25k - 65\,000$  Kč.

d) Najdi podobné výrazy jako v bodě c) pro příjmy  $k$  nižší než 1 000 000 Kč. Využij všechny nalezené vzorce k sestavení jednoduššího postupu pro výpočet daně, než je uveden v zadání. Zkontroluj, zda tento postup funguje pro určení daně v bodech a) a b).

$k \leq 300\,000$ :

- 15 % z  $k$ :  $k \cdot 0,15 = 0,15k$  Kč,

Celková daň.  $0,15k$  Kč.

$300\,000 < k \leq 1\,000\,000$ :

- 15 % z 300 000:  $300\,000 \cdot 0,15 = 45\,000$  Kč,
- 20 % z  $k - 300\,000$ :  $(k - 300\,000) \cdot 0,20 = 0,20k - 300\,000 \cdot 0,20 = 0,20k - 60\,000$  Kč,

Celková daň.  $45\,000 + 0,20k - 60\,000 = 0,20k - 15\,000$  Kč.

Postup na výpočet daně:

Najdi v tabulce řádku, která odpovídá Tvému příjmu a vypočti si daň dosazením do vzorce.

Příjem $k$ v rozmezí	Vzorec pro výpočet daně
$k \leq 300\,000$	$0,15k$
$300\,000 < k \leq 1\,000\,000$	$0,20k - 15\,000$
$1\,000\,000 < k$	$0,25k - 65\,000$

Daň z 500 000 Kč pomocí vzorce (druhá řádka):

$$0,20k - 15\,000 = 0,20 \cdot 500\,000 - 15\,000 = 85\,000 \text{ Kč}$$

Daň z 1 200 000 Kč pomocí vzorce (třetí řádka):

$$0,25k - 65\,000 = 0,25 \cdot 1\,200\,000 - 65\,000 = 235\,000 \text{ Kč}$$

**Dodatek:** Volba daňového systému je samozřejmě věc politického rozhodnutí, ke kterému se nehodí v této učebnici vyjadřovat. Na druhé straně argumentace jako tehdejšího ministra financí Kalouska, že výpočet daně podle vzorce typu  $0,20k$  (rovná daň) je podstatným zjednodušením daňové soustavy používající tři řádky se vzorci typu  $0,25k - 65\,000$  (progresivní zdanění) se nedá považovat za nic jiného než výsměch. Výsměch každému, kdo zvládá matematiku základní školy a někdy viděl daňové příznání s desítkami nesrozumitelných odečitatelných a přičitatelných položek (které samozřejmě slouží zejména k tomu, aby někteří platili ještě méně a daňoví poradci měli o práci postaráno). Pozoruhodná je i skutečnost, že na tuto argumentaci slyší voliči, kteří se sami považují za chytřejší a méně manipulovatelné než zbytek populace.

**Shrnutí:**