

2.11.3 Hranoly I

Předpoklady: 021101

Pedagogická poznámka: Při výuce v sekundě se jako největší problém ukázalo počítání s výrazy. Ačkoliv žáci písmenka používali bez větších problémů v jednoduchých vzorcích, počítání s mocninami a úpravy výrazů se i u velmi dobrých žáků staly něčím zcela formálním.

Objemy a povrchy hranolů se mi zdají jednou z mála věcí, kde je možné takové výpočty provádět a držet tak krátký vztah k realitě, aby šlo výsledky snadno kontrolovat. Proto kromě číselných příkladů počítáme průběžně i písmenkové.

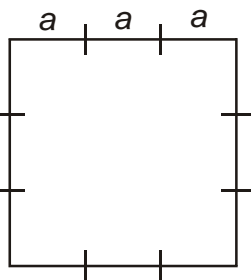
Př. 1: V Metrolandii vládne lobby výrobců měřidel. Proto se v této zemi velmi často mění zákonné měřicí jednotky. Obyvatelé už si zvykli a mnoho věcí raději řeší obecně (označí si jednotku délky například a a všechny výpočty provádějí s tímto písmenem), aby při změně jednotek nemuseli výpočty provádět znovu a pouze dosadili novou hodnotu jednotky. Vypočti obvod a obsah čtverce o délce strany 3 jednotky ($3a$). Výpočet zdůvodni i pomocí obrázku.

Lobby - skupina pro ovlivňování poslanců, vlády, médií a veřejnosti, která se snaží prosadit své zájmy (například ovlivnit zákonodárný proces tak, aby vyhovoval zájmům této skupiny). Například v ČR byla velmi dlouho silná lobby hazardních společností, které podařilo ovlivnit zákonodárství i výkonnou moc tak, že ČR byla zemí s největším počtem hracích automatů na tisíc obyvatel.

Obvod čtverce o straně $3a$

- $o = 3a + 3a + 3a + 3a = 12a$
- nebo jinak: $o = 4 \cdot 3a = 12a$.

Obrázek

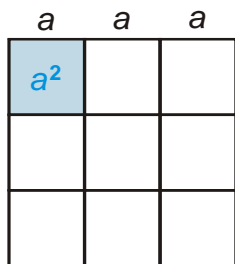


Pokud je jedna strana čtverce složena ze tří dílů, je obvod čtverce složen z dvanácti dílů.

Obsah čtverce o straně $3a$

- $S = a^2 = (3a)^2 = 3^2 \cdot a^2 = 9a^2$
- nebo jinak: $S = a \cdot a = 3a \cdot 3a = 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 9a^2$

Obrázek



Pokud je jedna strana čtverce složena ze tří dílů, můžeme čtverec vydláždít devíti čtverci o straně jeden díl.

Př. 2: Urči objem a povrch krychle o délce hrany 2 jednotky ($2a$). Výpočty zdůvodni i pomocí obrázku.

Povrch krychle o hraně $2a$

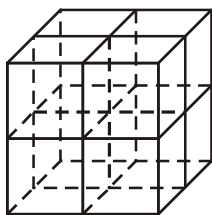
$$S = 6a^2 = 6(2a)^2 = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2$$

jinak: šest stěn každá o obsahu $S = 2a \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a = 4a^2 \Rightarrow$ povrch $S = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2$

Objem krychle o hraně $2a$

$$V = a^3 = (2a)^3 = 8a^3$$

jinak: $V = a \cdot a \cdot a = 2a \cdot 2a \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 8a^3$.



Z obrázku je vidět, že krychli o hraně $2a$:

- můžeme pokrýt 24 dlaždicemi o hraně a a ploše $a^2 \Rightarrow S = 24a^2$,
- můžeme sestavit z 8 menších krychliček o hraně a a objemu $a^3 \Rightarrow V = 8a^3$.

Př. 3: Urči objem a povrch kvádru o délkách hran $a, 2a, 3a$. Výpočty zdůvodni i obrázkem.

Povrch kvádru o hranách $a, 2a, 3a$

$$P = 2(ab + bc + ac) = 2(a \cdot 2a + 2a \cdot 3a + a \cdot 3a) = 2(2a^2 + 6a^2 + 3a^2) = 2(11a^2) = 22a^2$$

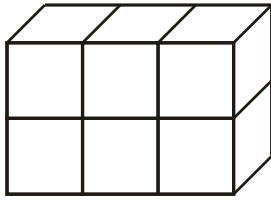
jinak: Obsahy stěn kvádru (každá je dvakrát):

- stěna o rozměrech a a $2a$: $S = a \cdot 2a = 2a^2$,
- stěna o rozměrech $2a$ a $3a$: $S = 2a \cdot 3a = 6a^2$,
- stěna o rozměrech a a $3a$: $S = a \cdot 3a = 3a^2$,

Celkově: $S = 2 \cdot 2a^2 + 2 \cdot 6a^2 + 2 \cdot 3a^2 = 4a^2 + 12a^2 + 6a^2 = 22a^2$

Objem kvádru o hranách $a, 2a, 3a$

$$V = abc = 2a \cdot a \cdot 3a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a = 6a^3$$



Z obrázku je vidět, že kvádr o hranách a , $2a$, $3a$:

- můžeme pokrýt 22 dlaždicemi o hraně a a ploše $a^2 \Rightarrow S = 22a^2$,
- můžeme sestavit z 6 menších krychliček o hraně a a objemu $a^3 \Rightarrow V = 6a^3$.

Př. 4: Jak vypadají v Metrolandii výsledky výpočtů, pro:
a) délky b) plochy c) objemu?

a) délky

Součet písmenek v první mocnině.

b) plochy

Součet písmenek v druhých mocninách (nebo vzájemných součinech dvou písmenek).

c) objemu

Součet písmenek v třetích mocninách (nebo vzájemných součinech tří písmenek).

Pedagogická poznámka: Následující příklad samozřejmě není matematika, ale není důvod se nad ním nezamyslet, když je trocha času.

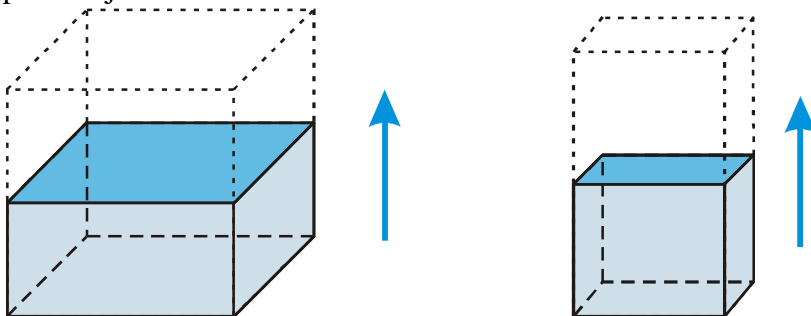
Př. 5: Proč lobby výrobců měřidel prosazuje neustálé změny zákonných měřících jednotek?
Čím bys na místě vlády této země změny občanům zdůvodnil?

Neustálé změny zákonných měřících jednotek znamenají neustálou nutnost kupovat nová měřítka a tedy značné zisky jejich výrobců.

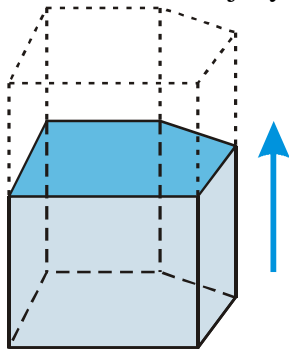
Změny jednotek je možné zdůvodnit:

- jedinečností Metrolandské civilizace, která nemusí otročit cizáckým jednotkám jako jiné národy,
- neutuchajícím duchem Metrolandských inovací, který brání šedému a neinvenčnímu opakování dávno překonaných postupů,
- zaměstnaností v továrnách, které vyrábějí měřidla,
- potřebností intelektuálního cvičení, které zvyšuje vzdělanost národa.

Krychli i kvádr můžeme vytvořit tak, že položíme jednu stěnu na vodorovnou podložku a pomalu ji zvedáme kolmo vzhůru.

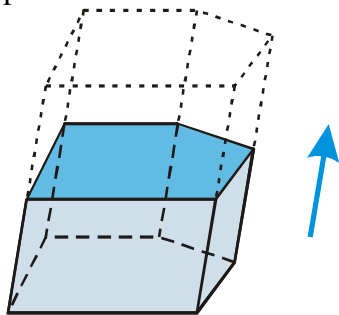


Stejným způsobem nemusí postupovat pouze se čtvercem nebo obdélníkem, kolmo vzhůru můžeme zvedat i jakýkoliv jiný n -úhelník - získáme tak **n -boký kolmý hranol**.

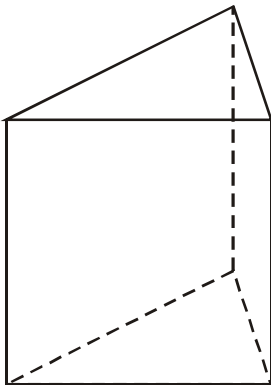


Na našem obrázku je podstavou hranolu pětiúhelník, proto hranol označujeme jako pětiboký kolmý hranol

Dodatek: Pokud bychom zvedali podstavu šikmo, vznikl by hranol, který označujeme jako kosý. Těmi se zatím zabývat nebudeme a všechny hranoly budeme automaticky považovat za kolmé.



Př. 6: Načrtni obrázek tříbokého kolmého hranolu. Urči počet jeho vrcholů hran a stěn.



Kolmý trojboký hranol má:

- 6 vrcholů,
- pět stěn (dvě podstavy a tři boční stěny).

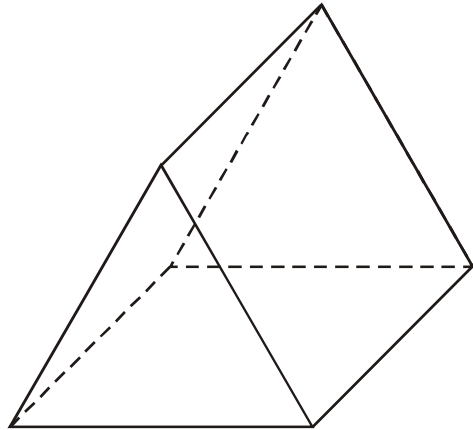
Př. 7: Pravidelný n -boký hranol je každý hranol, jehož podstavami jsou pravidelné n -úhelníky. Patří mezi pravidelné hranoly krychle? Patří mezi pravidelné hranoly kvádr (pokud musí mít kvádr nějakou speciální vlastnost, najdi ji)?

Krychle má za podstavu čtverec (pravidelný n -úhelník) \Rightarrow jde o pravidelný n -boký hranol.

Pravidelným n -bokým hranolem můžeme být i kvádr, pokud jeho podstavou bude čtverec.

Př. 8: Narýsuj obrázek pravidelného trojbokého hranolu o délce hrany $a = 4$ cm a výšce $v = 6$ cm. Hranol neleží na podstavě, ale na jedné z bočních stěn tak, že podstava je natočena čelem proti Tobě.

Pravidelný trojúhelník je rovnostranný trojúhelník \Rightarrow podstavou hranolu bude rovnostranný trojúhelník, který narýsujeme nezkresleně (je čelem k nám). Boční hrany budou zkrácené na polovinu a narýsované pod úhlem 45° .



Shrnutí: N -boký kolmý hranol vznikne "zvednutím" libovolného n -úhelníku kolmo vzhůru.