

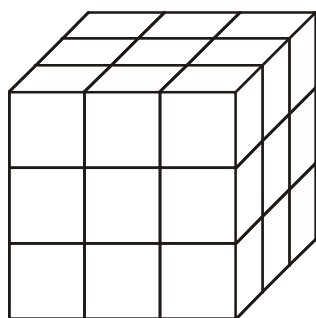
2.11.4 Hranoly II

Předpoklady: 021103

Př. 1: Urči objem a povrch krychle o délce hrany 3 jednotky ($3a$). Výpočty zkontroluj pomocí obrázku.

$$V = a^3 = (3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27a^3$$

$$S = 6a^2 = 6 \cdot (3a)^2 = 6 \cdot 3^2 \cdot a^2 = 6 \cdot 9 \cdot a^2 = 54a^2$$



Kontrola podle obrázku:

- objem: krychle o hraně $3a$ se skládá ze tří vrstev, každá z nich má 9 krychliček o hraně $a \Rightarrow$ krychle obsahuje 27 krychliček o hraně a (objemu a^3) \Rightarrow objem krychle o hraně 3 jednotky ($3a$) je $27a^3$,
- povrch: krychle o hraně $3a$ má šest stěn, každá z nich obsah 9 čtverců o straně $a \Rightarrow$ povrch krychle je složen z 54 čtverečků o straně a (obsahu a^2) \Rightarrow povrch krychle o hraně 3 jednotky ($3a$) je $54a^2$.

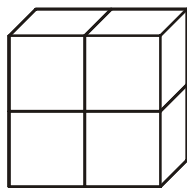
Pedagogická poznámka: Správněji (a opatrněji) by se oba výpočty měly psát pomocí jiných proměnných takto: $V = A^3 = (3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27a^3$ a takto:

$S = 6A^2 = 6 \cdot (3a)^2 = 6 \cdot 3^2 \cdot a^2 = 6 \cdot 9 \cdot a^2 = 54a^2$, aby byl na první pohled zřejmý rozdíl mezi A – délkou hrany a a – velikostí jednotky. Velikost písmen nerozlišují schválně, aby žáci museli přemýšlet a došlo jim, že malé a znamená na různých místech různé věci.

Př. 2: Urči objem a povrch kvádru o délkách hran $2a$, $2a$, a . Výpočty zkontroluj obrázkem.

$$V = abc = 2a \cdot 2a \cdot a = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 4a^3$$

$$S = 2(ab + bc + ac) = 2(2a \cdot 2a + 2a \cdot a + 2a \cdot a) = 2(4a^2 + 2a^2 + 2a^2) = 2 \cdot 8a^2 = 16a^2$$



Kontrola podle obrázku:

- objem: kvádr se skládá ze 4 krychliček o hraně a (objemu a^3) \Rightarrow objem kvádrů o délkách hran $2a, 2a, a$ je $4a^3$,
- povrch: kvádr má dvě stěny (přední a zadní) složené ze čtyř čtverečků o straně a (celkem 8 čtverečků) a čtyři stěny (všechny zbývající) složené ze dvou čtverečků o straně a (celkem 8 čtverečků) \Rightarrow povrch kvádrů je složen z 16 čtverečků o straně a (obsahu a^2) \Rightarrow povrch kvádrů délkách hran $2a, 2a, a$ je $16a^2$.

Př. 3: Jaký tvar musí mít výsledek příkladu na objem a povrch krychle délce hrany o libovolném počtu jednotek o velikosti a ? Jak musí výsledky vypadat u libovolného kvádrů? Pokus se svá tvrzení dokázat pomocí proměnné.

Objem krychle: výsledek má vždy tvar: $\text{číslo} \cdot a^3$. Číslo je třetí mocninou počtu jednotek u délky hrany.

$$\text{Důkaz: } V = a^3 = (na)^3 = n^3 a^3$$

Povrch krychle: výsledek má vždy tvar: $\text{číslo} \cdot a^2$. Číslo je šestinásobek druhé mocniny počtu jednotek u délky hrany.

$$\text{Důkaz: } P = 6a^2 = 6(na)^2 = 6n^2 a^2$$

Objem kvádrů: výsledek má vždy tvar: $\text{číslo} \cdot a^3$. Číslo je součinem počtu jednotek u délek jednotlivých hran.

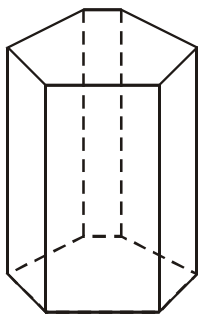
$$V = abc = (ka)(la)(ma) = klma^3$$

Povrch kvádrů: výsledek má vždy tvar: $\text{číslo} \cdot a^2$. Číslo je dvounásobek čísla získaného sčítáním součinů počtů jednotek u dvojic hran.

$$V = abc = (ka)(la)(ma) = klma^3$$

$$\begin{aligned} S &= 2(ab + bc + ac) = 2[(ka)(la) + (la)(ma) + (ka)(ma)] = 2(kla^2 + lma^2 + kma^2) = \\ &= 2(kl + lm + ka)a^2 \end{aligned}$$

Př. 4: Urči počet vrcholů, hran a stěn a u šestibokého kolmého hranolu.



- vrcholy: v obou podstavách má hranol 6 vrcholů \Rightarrow celkem má 12 vrcholů,
- hrany: v obou podstavách má hranol 6 hran, dalších 6 hran spojuje podstavy dohromady \Rightarrow celkem 18 hran,
- stěny: hranol má dvě podstavy a šest bočních stěn \Rightarrow celkem 8 stěn.

Př. 5: Urči počet vrcholů, hran stěn a u n -bokého kolmého hranolu.

Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu:

- vrcholy: v obou podstavách má hranol n vrcholů \Rightarrow celkem má $2n$ vrcholů,

- hrany: v obou podstavách má hranol n hran, dalších n hran spojuje podstavy dohromady \Rightarrow celkem $3n$ hran,
- stěny: hranol má dvě podstavy a n bočních stěn \Rightarrow celkem $n+2$ stěn.

Př. 6: Kolmý trojboký hranol má podstavu pravoúhlý trojúhelník o délkách odvěsen 3 cm a 4 cm a výšce 7 cm. Vypočti jeho povrch a objem.

Povrch: dvě podstavy pravoúhlé trojúhelníky a tři boční stěny obdélníky.

- Podstavy: pravoúhlý trojúhelník odvěsny 3 a 4 cm (jedna odvěsna je výškou k druhé odvěsně) $\Rightarrow S_p = \frac{av_a}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$,
- boční stěna: obdélník o stranách 3 cm a 7 cm $\Rightarrow S_1 = ab = 3 \cdot 7 \text{ cm}^2 = 21 \text{ cm}^2$,
- boční stěna: obdélník o stranách 4 cm a 7 cm $\Rightarrow S_2 = ab = 4 \cdot 7 \text{ cm}^2 = 28 \text{ cm}^2$,
- boční stěna: musíme určit zbývající stranu pravoúhlého trojúhelníka:
 $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5$
obdélník o stranách 5 cm a 7 cm $\Rightarrow S_3 = ab = 5 \cdot 7 \text{ cm}^2 = 35 \text{ cm}^2$,

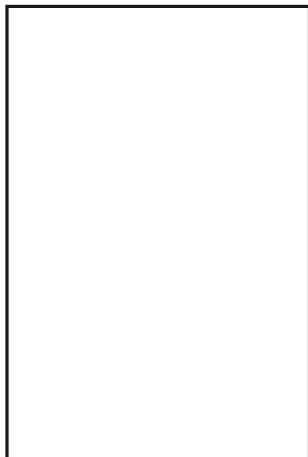
$$\Rightarrow S = 2S_p + S_1 + S_2 + S_3 = 2 \cdot 6 + 21 + 28 + 35 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2$$

Objem: Podobně jako u kvádru – spočítáme obsah podstavy, který odpovídá počtu krychliček v jedné řadě a vynásobíme ho výškou (počtem vrstev)

$$V = S_p \cdot v = 6 \cdot 7 \text{ cm}^3 = 42 \text{ cm}^3$$

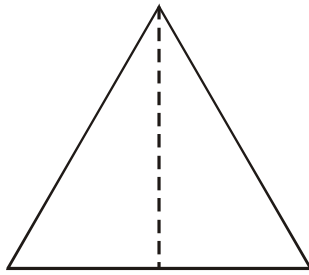
Př. 7: Narýsuj obrázek pravidelného trojbokého hranolu o délce hrany $a = 4$ cm a výšce $v = 6$ cm. Hranol leží na podstavě tak, že jedna z bočních stěn je natočena čelem k Tobě.

Stěnu hranolu, natočenou k nám můžeme narýsovat ve skutečné velikosti.

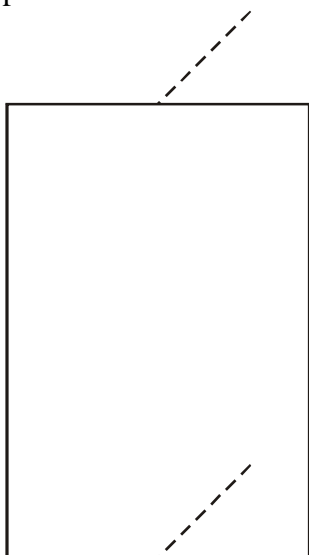


Zbývající hrany v podstavách rýsovat nemůžeme (nejsou ani rovnoběžné ani kolmé k přední stěně).

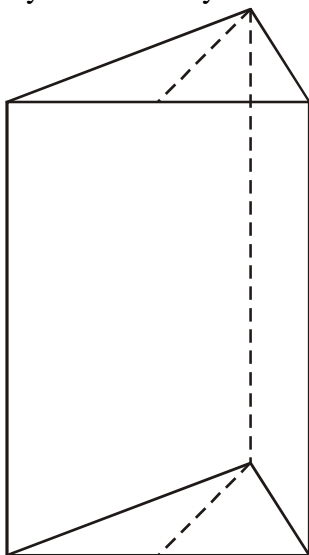
Narýsujeme si podstavu a hledáme úsečku, která je kolmá na přední hranu.



Jde o výšku v podstavě \Rightarrow tato úsečka se zobrazí ze středů narýsovaných podstavních hran pod úhlem 45° zkrácená na polovinu.



Nyní můžeme rys hranolu rychle dokončit, protože máme určené všechny vrcholy.



Shrnutí: