

2.11.5 Objem a povrch hranolu I

Předpoklady: 021101

Př. 1: Vypočti objem a povrch kvádru o délkách hran $2a; 3a; 5a$.

$$V = abc = 2a \cdot 3a \cdot 5a = 30a^3$$

$$P = 2ab + 2bc + 2ac = 2 \cdot 2a \cdot 3a + 2 \cdot 3a \cdot 5a + 2 \cdot 2a \cdot 5a = 12a^2 + 30a^2 + 20a^2 = 62a^2$$

Kvádr má objem $30a^3$ a povrch $62a^2$.

Př. 2: Vypočti objem trojbokého hranolu jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník se stranami $2a$ a $3a$.

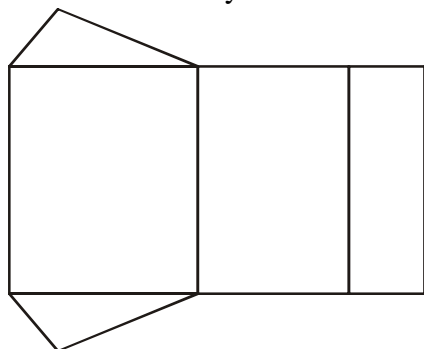
Podstava je pravoúhlý trojúhelník (potřebujeme znát její obsah) \Rightarrow strana b trojúhelníku je kolmá na stranu a a tedy zároveň i výškou $v_a \Rightarrow S = \frac{av_a}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{2a \cdot 3a}{2} = 3a^2$.

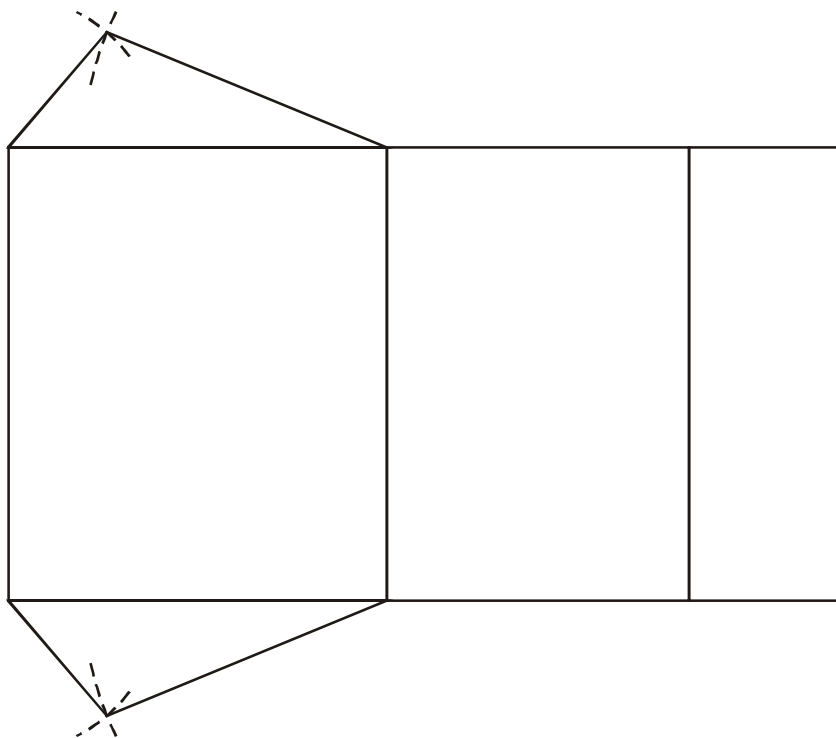
Pro výpočet ještě musíme plochu podstavy vynásobit výškou hranolu (není zadaná, tak si ji označíme v).

$$V = S \cdot v = 3a^2v$$

Př. 3: Načrtni a poté narýsuj libovolnou síť trojbokého kolmého hranolu jehož podstava tvoří trojúhelníky o stranách $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 5$ cm a který má výšku $v = 6$ cm. Narýsovanou síť využij k výpočtu povrchu a objemu tohoto hranolu.

Náčrtek: Podstava tvoří dva shodné trojúhelníky, plášť tři obdélníky.





Pro výpočet povrchu i objemu potřebujeme znát jednu výšku trojúhelníku. Výška na nejdelší stranu: $v_c = 1,5 \text{ cm}$.

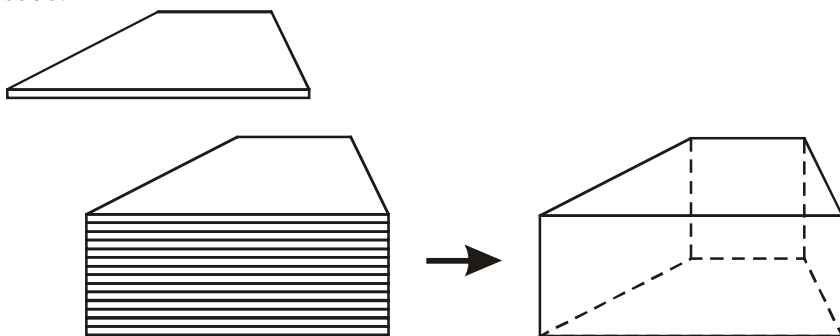
$$P = 2S_t + S_{pl} = 2 \cdot \frac{c \cdot v_c}{2} + av + bv + cv = 5 \cdot 1,5 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 73,5 \text{ cm}^2$$

$$V = S_t \cdot v = 2 \cdot \frac{c \cdot v_c}{2} \cdot v = c \cdot v_c \cdot v = 5 \cdot 1,5 \cdot 6 \text{ cm}^3 = 45 \text{ cm}^3$$

Zadaný trojboký hranol má objem 45 cm^3 a povrch $73,5 \text{ cm}^2$.

Př. 4: Napiš vzorec pro objem kolmého hranolu (vzorec, který platí pro všechny kolmé hranoly bez výjimky).

Kolmý hranol si můžeme představit jako sloupec stejných plátek, které poskládáme kolmo na sebe.



Ve všech případech je objem hranolu tím větší, čím větší je:

- obsah podstavy (ten může být tvořen různými obrazci a představuje vlastně velikosti „plátek“, které skládáme na sebe),
- výška hranolu (čím větší výška, tím více „plátek“ na sebe poskládáme a tím více vody se do výsledného hranolu vejde).

$$V = S_p \cdot v$$

Objem kolmého hranolu je dán vzorcem $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v jeho výška.

Povrch hranolu je dán vzorcem $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$, kde S_p je obsah podstavy a S_{pl} je obsah pláště.

Př. 5: Někdy je pro povrch hranolu uváděn vzorec $S = 2 \cdot S_p + v \cdot o$. Co znamená písmenko o ve vzorci? Platí tento vzorec pro všechny kolmé hranoly?

Písmeno o znamená obvod podstavy. Plášť hranolu se skládá z obdélníků, které mají jedno stranu v a druhou stranou jsou postupně všechny hrany podstavy \Rightarrow pokud nejdříve posčítáme délky podstavných hran a pak je vynásobíme výškou musíme získat stejné hodnotu (jako bychom všechny obdélníky spojili do jednoho velkého).

Z předchozího plyne, že vzorec platí pro všechny kolmé hranoly (všechny mají plášť složený obdélníků ...).

Př. 6: Je dán pravidelný kolmý čtyřboký hranol o délce hrany a . Dosad' pro něj do vzorce pro objem a povrch hranolu. Co získáš?

Pravidelný čtyřboký hranol o délce hrany a je krychle \Rightarrow měli bychom získat vzorce pro objem a povrch krychle.

$$S_p = a \cdot a = a^2 \text{ (podstavou je čtverec o straně } a)$$

$$V = S_p \cdot v = a^2 \cdot a = a^3$$

$$S_{pl} = 4 \cdot a^2 \text{ (plášť tvoří čtyři čtverce o straně } a)$$

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot a^2 + 4a^2 = 6a^2$$

Př. 7: Je dán kolmý čtyřboký hranol o výšce v , jehož podstavou je obdélník o délkách stran a, b . Dosad' pro něj do vzorce pro objem a povrch hranolu. Co získáš?

Měli bychom získat vzorce pro objem a povrch kvádru (kolmý čtyřboký hranol s obdélníkovou podstavou je kvádr), ve kterých se místo písmenka c bude vyskytovat písmenko v .

$$S_p = a \cdot b \text{ (podstavou je obdélník o stranách } a, b)$$

$$V = S_p \cdot v = ab \cdot v = abv$$

$$S_{pl} = 2 \cdot av + 2bv \text{ (plášť tvoří dva obdélníky o stranách } a, v \text{ a dva obdélníky o stranách } b, v)$$

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot ab + 2av + 2bv = 2(ab + av + bv)$$

Shrnutí: Objem kolmého hranolu je dán vzorcem $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy a v jeho výška. Povrch hranolu je dán vzorcem $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$, kde S_p je obsah podstavy a S_{pl} je obsah pláště.