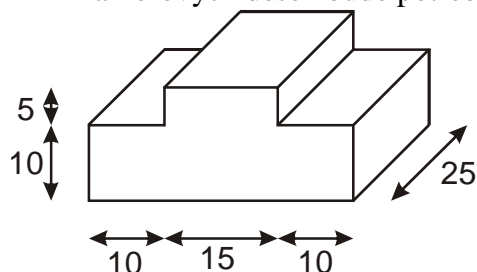
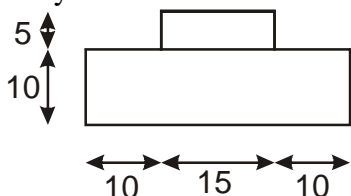


2.11.7 Objem a povrch hranolu II

Př. 1: Honza připravuje na zahradě stavbu svého pomníku. Začíná od podstavce. Rozměry jsou uvedeny v metrech. Urči kolik m^3 betonu bude na podstavec potřebovat. Kolik m^2 mramorových desek bude potřebovat na jeho obložení?



Podstavec představuje kolmý hranol, kde čelní stěna tvoří podstavu \Rightarrow určíme obsah čelní stěny.



Čelní stěnu můžeme rozložit na dva obdélníky:

- $S_1 = ab = 5 \cdot 15 \text{ m}^2 = 75 \text{ m}^2$
- $S_2 = ab = 10 \cdot 35 \text{ m}^2 = 350 \text{ m}^2$

$$S_p = S_1 + S_2 = 75 + 350 \text{ m}^2 = 425 \text{ m}^2$$

$$V = S_p \cdot v = 425 \cdot 25 \text{ m}^3 = 10\,625 \text{ m}^3$$

Spodní stěna podstavce se obkládat nebude, musíte tedy spočítat, obsah všech zbývajících stěn.

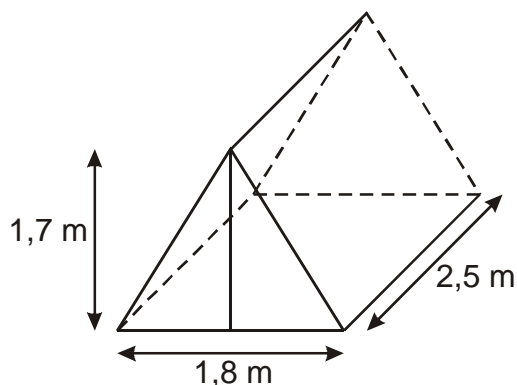
- Dvě větší boční stěny: $S = 2 \cdot 10 \cdot 25 \text{ m}^2 = 500 \text{ m}^2$.
- Dvě menší boční stěny: $S = 2 \cdot 5 \cdot 25 \text{ m}^2 = 250 \text{ m}^2$.
- Čelní a zadní stěna: $S = 2 \cdot 425 \text{ m}^2 = 850 \text{ m}^2$.
- Dvě menší vrchní stěny: $S = 2 \cdot 10 \cdot 25 \text{ m}^2 = 500 \text{ m}^2$.
- Velká vrchní stěna: $S = 15 \cdot 25 \text{ m}^2 = 375 \text{ m}^2$.

Celková plocha mramorových desek: $S = 500 + 250 + 850 + 500 + 375 \text{ m}^2 = 2\,475 \text{ m}^2$.

Honza bude na stavbu podstavce svého pomníku potřebovat $10\,625 \text{ m}^3$ betonu a $2\,475 \text{ m}^2$ mramorových desek.

Př. 2: Terka si šije z cely vlastní stan - takzvané áčko. Stan bude pokrývat plochu $2,5 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$ a v nejvyšším bodě bude vysoký $1,7 \text{ m}$. Kolik m^2 cely bude potřebovat? Kolik m^3 vzduchu bude ve stranu?

Nakreslíme si obrázek.

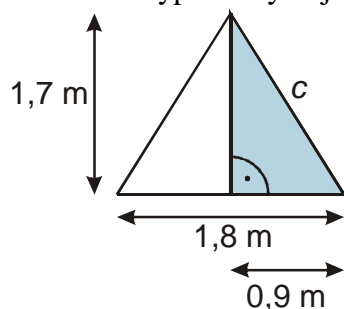


Stan představuje kolmý trojboký hranol s podstavou ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku. Čelní stěnu tvoří trojúhelník o straně 1,8 m a jí odpovídající výšce 1,7 m:

$$S_p = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1,8 \cdot 1,7}{2} \text{ m}^2 = 1,53 \text{ m}^2$$

$$V = S_p \cdot v = 1,53 \cdot 2,5 \text{ m}^3 = 3,825 \text{ m}^3 \doteq 3,8 \text{ m}^3$$

Pro výpočet potřebné velikosti cely musíme znát délku ramen trojúhelníku, který tvoří přední stěnu. Pro výpočet využijeme Pythagorovu větu.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0,9^2 + 1,7^2} \text{ m} = 1,9 \text{ m}$$

Celu potřebujeme pouze na horní stranu stanu, tedy na stěny, které vycházejí z ramen trojúhelníku.

$$S = 2 \cdot ab = 2 \cdot 1,9 \cdot 2,5 \text{ m}^2 = 9,5 \text{ m}^2$$

Terka bude na stan potřebovat $9,5 \text{ m}^2$ cely. Ve stanu bude $3,8 \text{ m}^3$ vzduchu.

Dodatek: Teoreticky by bylo možné nakreslit obrázek i tak, že by horní hrana áčka byla rovnoběžná s kratší hranou podstavy. Tímto způsobem však nikdo obrázky nekreslí a neodpovídá to ani klasické představě áčka, které má vždy horní hranu rovnoběžnou s delší stranou podstavy. Pokud se nad tím někdo pozastaví můžete se ho zeptat, jak by se tedy mělo zadání změnit. S tím, že takto sice není matematicky úplné, ale přesto srozumitelné pro všechny, kteří mají běžnou představu áčka.

Př. 3: Martin řeší problém se zakopáním vodovodu ze studně do zahradní chaty. Trubku je třeba zakopat do nezámrazné hloubky 80 cm vyhloubením příkopu, který má přibližně průřez lichoběžníku s dolní základnou 30 cm a horní základnou 50 cm. Kolik kg země bude muset při kopání vyházet? Vodovod má délku 25 m.

Potřebujeme určit hmotnost země ve výkopu, který má tvar kolmého hranolu s lichoběžníkovou podstavou.

Objem hranolu

$$\text{Obsah podstavy (lichoběžník): } S_p = \frac{(a+c)v}{2} = \frac{(30+50) \cdot 80}{2} \text{ cm}^2 = 3\,200 \text{ cm}^2 = 0,32 \text{ m}^2.$$

$$\text{Objem hranolu: } V = S_p \cdot v = 0,32 \cdot 25 \text{ m}^3 = 8 \text{ m}^3.$$

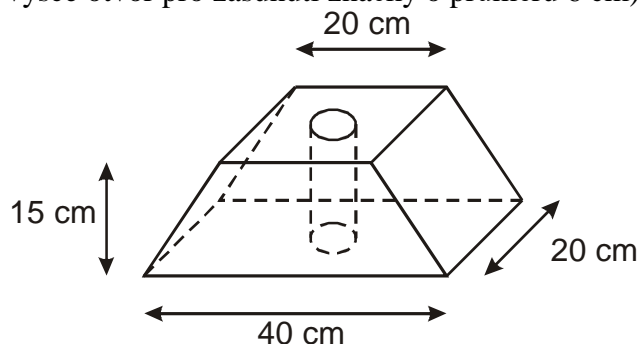
Hustota půdy: Pro naše použití potřebujeme znát hodnotu objemové hmotnosti půdy (tedy půdy v přirozeném stavu, nevysušené a nezbažené póry) na internetu je možné nalézt hodnoty od 1000 kg/m^3 do 1800 kg/m^3 . Použijeme střední hodnotu 1400 kg/m^3 (pokud by Martin stál o přesnější odhad, bylo by asi nejvýhodnější si hustotu půdy přímo změřit).

$$\rho = \frac{m}{V} \quad / \cdot V$$

$$m = \rho V = 1400 \cdot 8 \text{ kg} = 11\,200 \text{ kg} = 11,2 \text{ t}$$

Martin bude muset během přípravy výkopu vyházet 11,2 tuny hlíny.

Př. 4: Na obrázku je nakreslený betonový podstavec pro dočasnou dopravní značku (vzdálenosti jsou uvedeny v cm). Urči jeho hmotnost (uvnitř podstavce je po celé výšce otvor pro zasunutí značky o průměru 6 cm).



Podstavec má tvar kolmého hranolu s lichoběžníkovou podstavou. Pokud budeme chtít určit objem podstavce, musíme o objemu hranolu odečíst objem válce, který představuje díra na umístění značky.

Objem hranolu

$$\text{Obsah podstavy (lichoběžník): } S_p = \frac{(a+c)v}{2} = \frac{(40+20) \cdot 15}{2} \text{ cm}^2 = 450 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Objem hranolu: } V = S_p \cdot v = 450 \cdot 15 \text{ cm}^3 = 6750 \text{ cm}^3.$$

Objem válce (díra)

$$V = 2\pi r^2 v = 2\pi \cdot 3^2 \cdot 15 \text{ cm}^3 \doteq 850 \text{ cm}^3.$$

Objem betonu v podstavci: $V = 6750 - 850 \text{ cm}^3 = 5900 \text{ cm}^3 = 0,0059 \text{ m}^3$.

Hustota betonu: na internetu je možné nalézt hodnoty od 1800 kg/m^3 do 2400 kg/m^3 .

Použijeme střední hodnotu 2100 kg/m^3 .

$$\rho = \frac{m}{V} \quad / \cdot V$$

$$m = \rho V = 2100 \cdot 0,0059 \text{ kg} = 12,4 \text{ kg}$$

Podstavec na značku má hmotnost 12,4 kg.

Shrnutí: