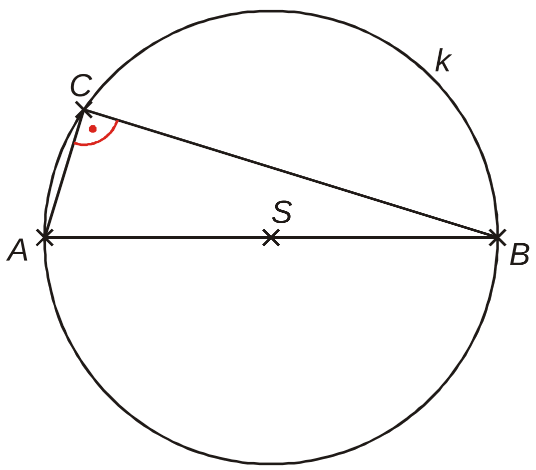
## 3.3.4 Thaletova věta

**Předpoklady:** 030303

**Př. 1:** Narýsuj kružnici $k(S;5\,\mathrm{cm})$ a její průměr *AB*. Na kružnici narýsuj libovolný bod *C* různý od bodů *A*, *B* (bod *C* zvol jinak než soused v lavici). Narýsuj trojúhelník *ABC*. Má nějakou speciální vlastnost? Změř ji.

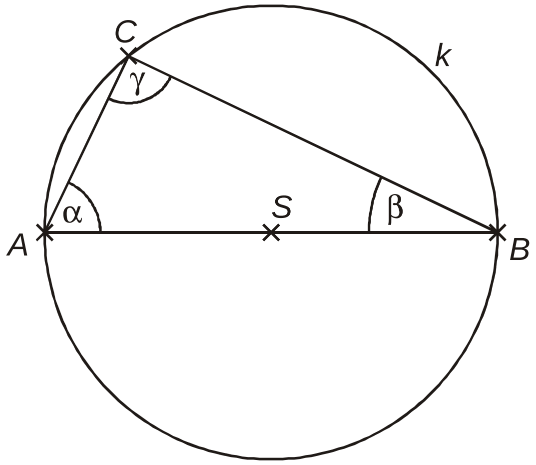



Bez ohledu na to, kde jsme si na kružnici *k* zvolili bod *C*, je úhel *ACB* pravý.

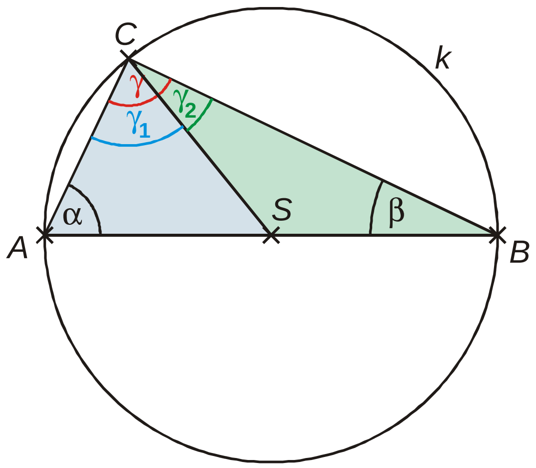
**Př. 2:** Dokaž vlastnost, kterou jsme objevili v předchozím příkladě.

Jakou vlastnost dokazujeme: Pokud je úsečka *AB* průměrem kružnice *k* a bod *C* leží na kružnici *k*, je úhel $ACB$ pravý $\Rightarrow$ předpokládáme, že bod *C* leží na kružnici s průměrem *AB* a od tohoto předpokladu se musíme dostat k tomu, že úhel $\gamma$ je pravý.

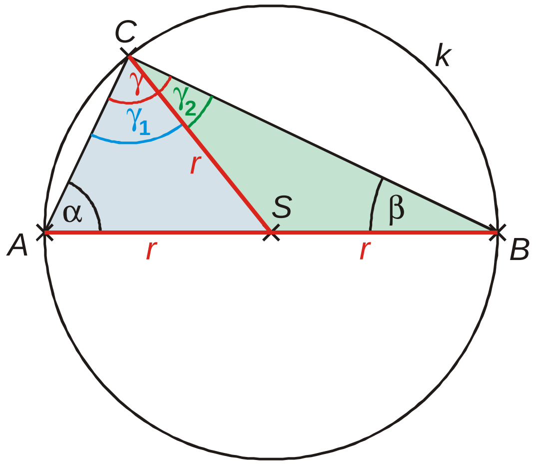
Nakreslíme si obrázek:




Pravý úhel je zřejmě důsledkem toho, že bod *C* leží na kružnici $\Rightarrow$ zkusíme využít speciální vlastnosti bodů na kružnici – jejich stejnou vzdálenost od středu $\Rightarrow$ do obrázku přidáme úsečku *CS*.



Trojúhelník *ABC* i úhel $\gamma$ jsme rozdělili na dvě části. Vyznačíme do obrázku poloměry kružnice.



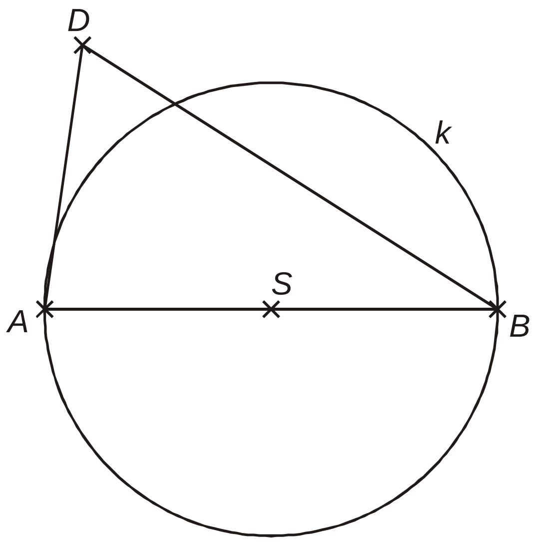
Co nového jsme se dozvěděli o trojúhelnících na obrázku?
Oba mají dvě shodné strany $\Rightarrow$ oba jsou rovnoramenné.
Proti shodným stranám leží shodné úhly $\Rightarrow$ platí $\alpha = \gamma_1$ a $\beta = \gamma_2$.

Použijeme pravidlo, pro úhly v trojúhelníku: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Chceme pravidlo pro úhel $\gamma$ $\Rightarrow$ zbavíme se úhlů $\alpha$ a $\beta$: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = 180°$.
Platí: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma \Rightarrow \gamma + \gamma = 180°$.
$2\gamma = 180° \qquad / : 2$
$\gamma = 90°$.
Tímto jsme dokázali, že pokud vrchol *C* leží na kružnici, je úhel $\gamma$ pravoúhlý.

**Pedagogická poznámka:** Pravděpodobnost, že by někdo z žáků dokázal Thaletovu větu ze zadání je malá, skoro stejně malá je pravděpodobnost, že větší část třídy bude něco mít z toho, že důkaz předvedete u tabule. Já důkaz u tabule dělám, ale na kritických místech dávám žákům čas, aby se sami pohnuli dál. Jde o následující okamžiky:
z čeho vycházíme a kam se musíme dostat,
v obrázku musíme využít, že bod *C* je na kružnici,
zakreslíme do obrázku úsečky *CS*.
Samostatné dokončení důkazu od poslední rady není vzácné (i když samozřejmě

není tak vybroušené jako v řešení).

**Př. 3:** Narýsuj kružnici $k(S;6\,\text{cm})$ a úsečku *AB*, která je jejím průměrem. Najdi mimo kružnici bod *D* tak, aby trojúhelník *ABD* byl pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu *D*.

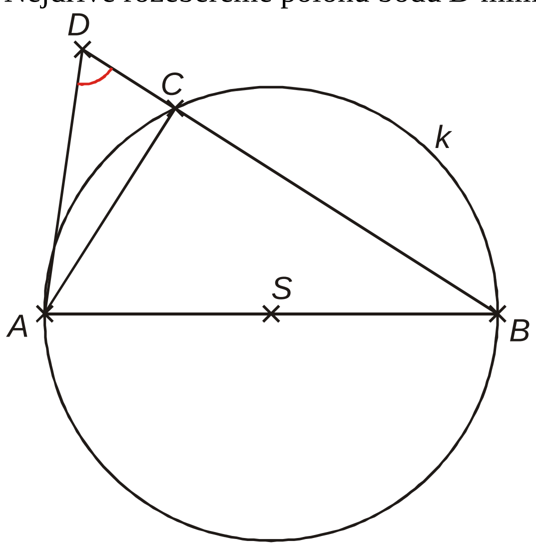



Zdá se, že nají takový bod není možné. Pokud bude bod *D* vně kružnice, bude úhel *ADB* menší než $90°$, pokud bude uvnitř bude větší než $90°$.

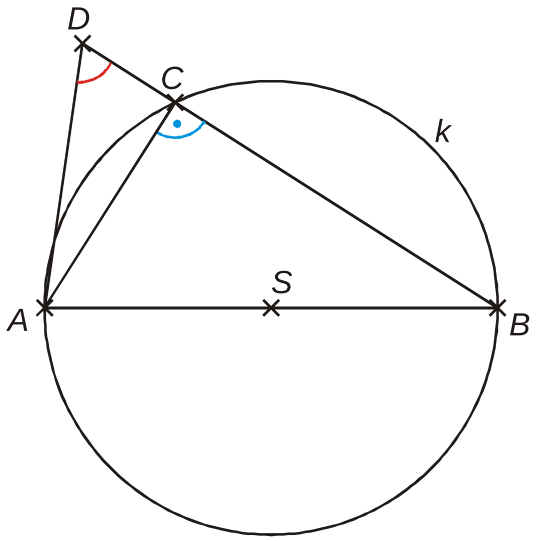
Zkusíme se o tom přesvědčit důkazem.

- Vycházíme z: Bod *D* leží mimo kružnici *k*.
- Dokazujeme: Úhel *ADB* není pravý.

Nejdříve rozebereme polohu bodu *D* mimo kružnici.

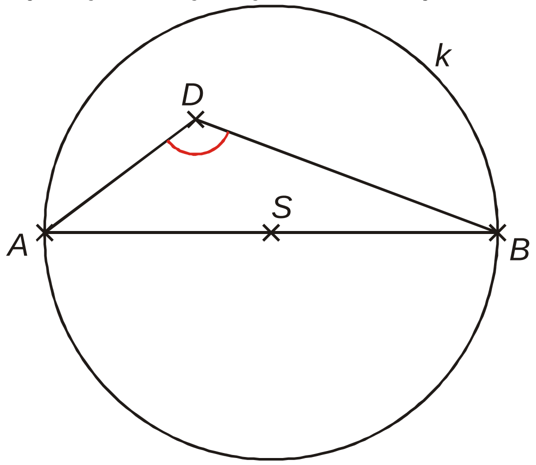



Průsečík úsečky *DB* s kružnicí *k* označíme *C* $\Rightarrow$ získáme dva trojúhelníky *ABC* a *ACD*.

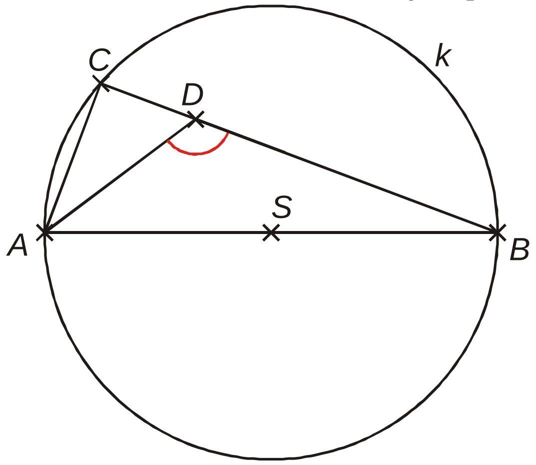



Úhel $ACB$ je pravý (dokázali jsme v předchozím příkladu) $\Rightarrow$ úhel $ACD$ je pravý (dohromady s úhlem $ACB$ dají $180°$) $\Rightarrow$ úhel $ADC$ nemůže být pravý, protože v trojúhelníku $ACD$ by byly dva pravé úhly.

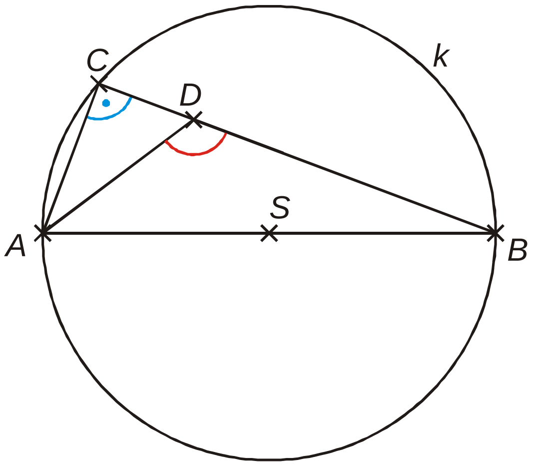
Nyní zjistíme, jaká je situace, když bod $D$ leží uvnitř kruhu.




Prodloužíme úsečku $BD$ tak, aby se protnula s kružnicí $k$ a vznikl bod $C$.




Získáváme trojúhelníky $ADC$ a $ADB$.




Úhel $ACB$ je pravý (dokázali jsme v předchozím příkladu) $\Rightarrow$ úhel $ADC$ je menší než $90°$ (zbývající úhly v pravoúhlém trojúhelníku jsou menší) $\Rightarrow$ úhel $ADB$ je větší než $90°$ (součet úhlů $ADC$ a $ADB$ je $180°$).

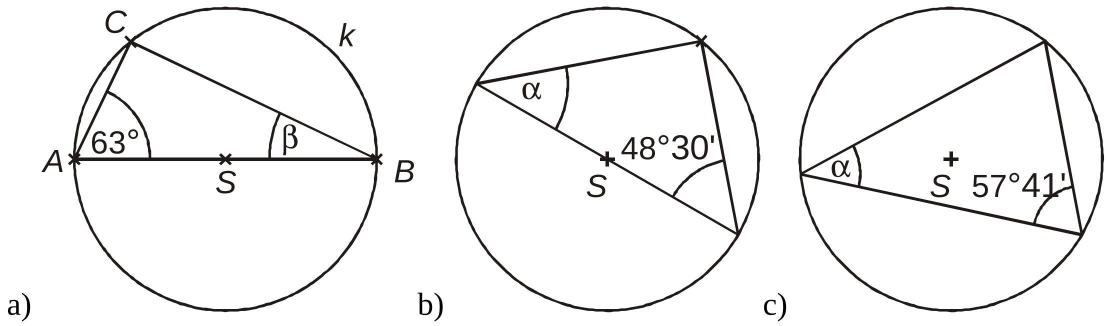
**Pedagogická poznámka:** Žáci začnou sami protestovat, že najít bod mimo kružnici nejde, protože jsme si už v předchozím příkladu dokázali. Upozorním je, že to není pravda, že jsme dokázali, že pokud je bod *C* na kružnici, tak je u něj pravý úhel je, ale to rozhodně neznamená, že u bodu, který na kružnici není, by pravý úhel být nemohl (uvádím příklad ze třídou - skutečnost, že všichni žáci přítomní v této třídě jsou ze sekundy, neznamená, že každý, žák mimo tuto třídu není ze sekundy (každou hodinu někdo chybí)). Pokud si myslí, že bod *D* neexistuje, musí to dokázat (a mohou klidně využít předchozí větu), čímž plynule přejdeme k důkazu. Žáků, kteří dovedou důkaz do konce od okamžiku, kdy dokreslím do obrázku bod *C*, je docela dost.

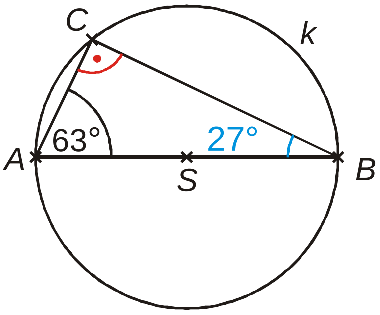
**Thaletova věta:**
**Pro libovolný trojúhelník *ABC* platí:**

- **je-li trojúhelník *ABC* pravoúhlý s přeponou *AB*, pak vrchol *C* leží na kružnici *k* s průměrem *AB*,**
- **leží-li vrchol *C* na kružnici *k* s průměrem *AB*, je *ABC* pravoúhlý trojúhelník s přeponou *AB*.**

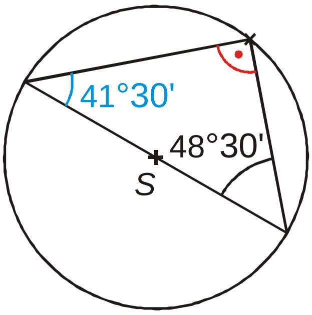
**Kružnici *k* nad průměrem *AB* říkáme Thaletova kružnice (zkráceně Thaletovka).**

**Př. 4:** Dopočítej vyznačené úhly.

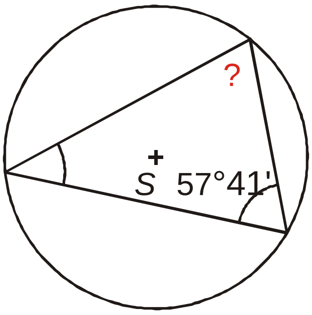





Úhel $ACB$ je pravý (Thaletova věta) $\Rightarrow$ $\alpha+\beta=90°$ $\Rightarrow$ $\beta=90°-\alpha=90°-63°=27°$.




Neoznačený úhel je pravý (Thaletova věta) $\Rightarrow$ $\alpha+48°30'=90°$ $\Rightarrow$ $\alpha=90°-48°30'=41°30'$.

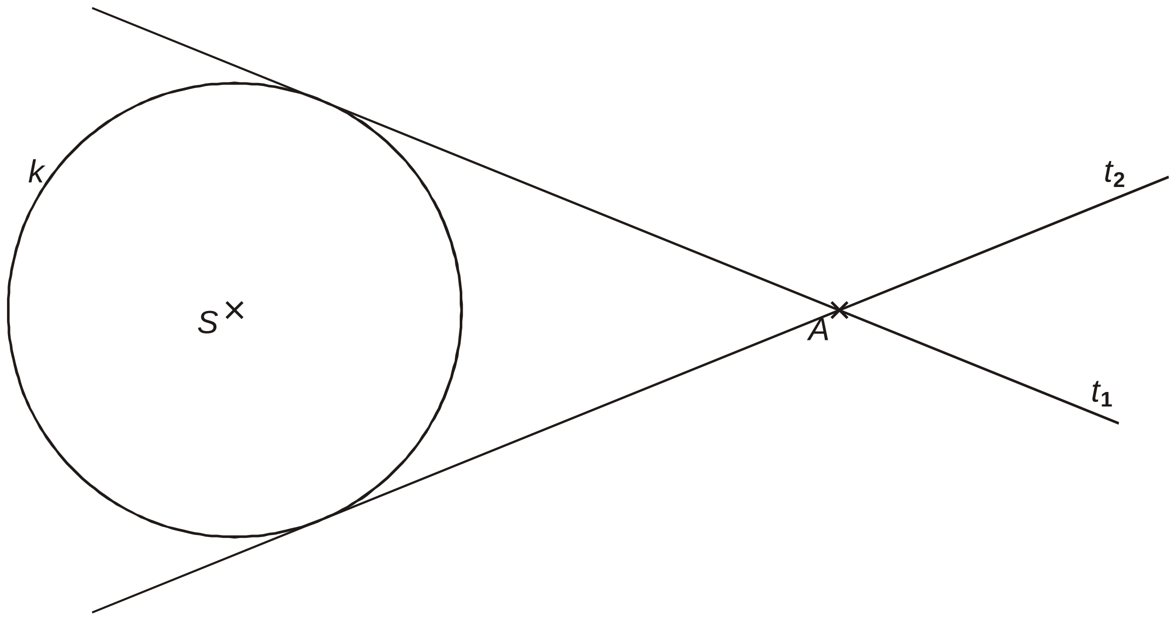



Velikost neoznačeného úhlu neznáme (protilehlá strana není průměr kružnice, proto neplatí Thaletova věta) $\Rightarrow$ nejde určit velikost úhlu $\alpha$ (maximálně můžeme napsat výraz $\alpha=180-57°41'-?$).

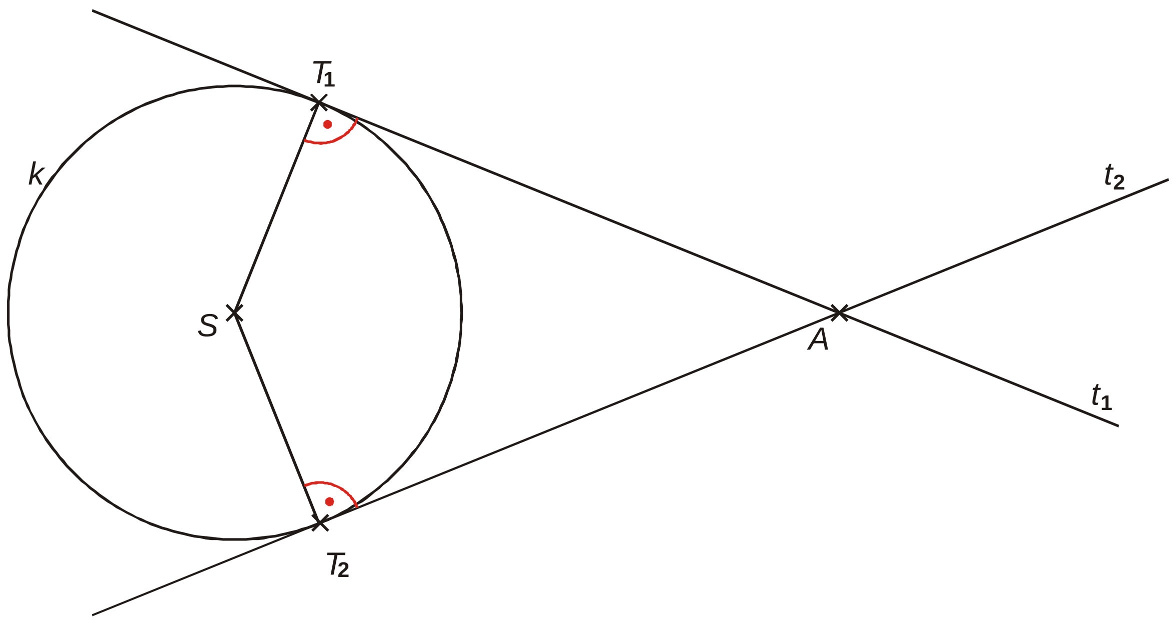
**Pedagogická poznámka:** Hned na počátku řešení následujícího příkladu je třeba žáky upozornit, že není možné tečnu hledat posouváním pravítka (přestože je to uvedeno v zadání). Není příliš pravděpodobné, že by příklad někdo vyřešil, proto velmi brzo začínám postrkávat od tabule.

**Př. 5:** Je dána kružnice $k(S;3\,\text{cm})$ a bod $A$, $|SA|=8\,\text{cm}$. Narýsuj tečny kružnice $k$ jdoucí bodem $A$. Tečnu není možné „rýsovat“ posouváním pravítka, je nutné ji najít jako spojnici dvou bodů.

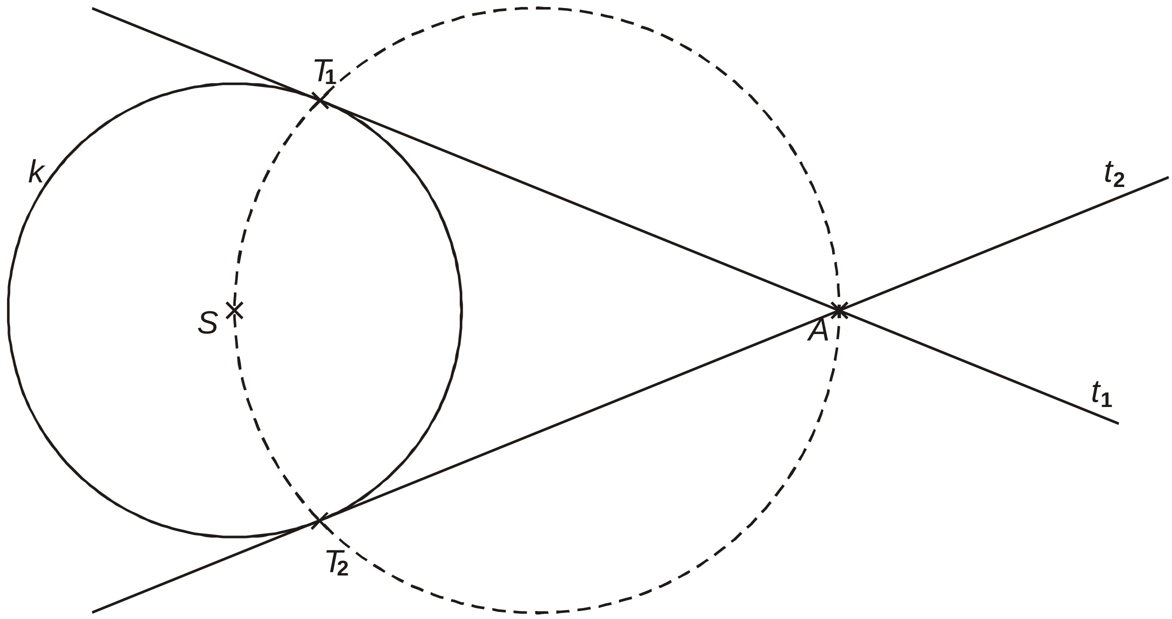
Tečnu máme najít jako spojnici dvou bodů, máme pouze jeden bod (bod $A$) $\Rightarrow$ nakreslíme si obrázek situace, kterou máme získat.




Pro konstrukci obou tečen máme zatím jediný bod – bod *A*.
Jaký další bod bychom mohli použít?
Zřejmě tečný bod, ve kterém se tečny dotýkají kružnice.
Čím se tyto body vyznačují?




Zdá se, že tečna $t_1$ je kolmá na úsečku $T_1S$ . Jak by se to dalo využit k nalezení bodu $T_1$?
Vrcholy pravých úhlů leží na Thaletově kružnici $\Rightarrow$ sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem *SA* (tím zajistíme pravý úhel $STA$) a tečné body najdeme jako průsečíky této kružnice s kružnicí *k*.




**Pedagogická poznámka:** Od okamžiku, kdy rozhodnete, že je nutné tečny sestrojit jako spojnice dvou bodů a nabídnete tečné body na kružnici se vždy najde někdo konstrukci postrčí o další krok.

**Př. 6:** Sepiš postup konstrukce tečny kružnice $k(S;r)$ z bodu *A*, který leží mimo kružnici.

Najdeme střed úsečky *SA*.

Sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem *SA* - tedy kružnici $l(S_{AS};|S_{SA}A|)$.

Průsečíky kružnic *k* a *l* jsou tečné body $T_1$ a $T_2$.

Tečny $t_1$ a $t_2$ prochází bodem *A* a body $T_1$ a $T_2$.

**Tečna kružnice je kolmá na přímku, která spojuje střed kružnice s jejím tečným bodem.**

Ke konstrukci tečny z bodu *A* ke kružnici *k* využíváme Thaletovu kružnici nad průměrem *SA*.

**Shrnutí:** Trojúhelník sestrojený nad průměrem kružnice své opsané kružnice je pravoúhlý.