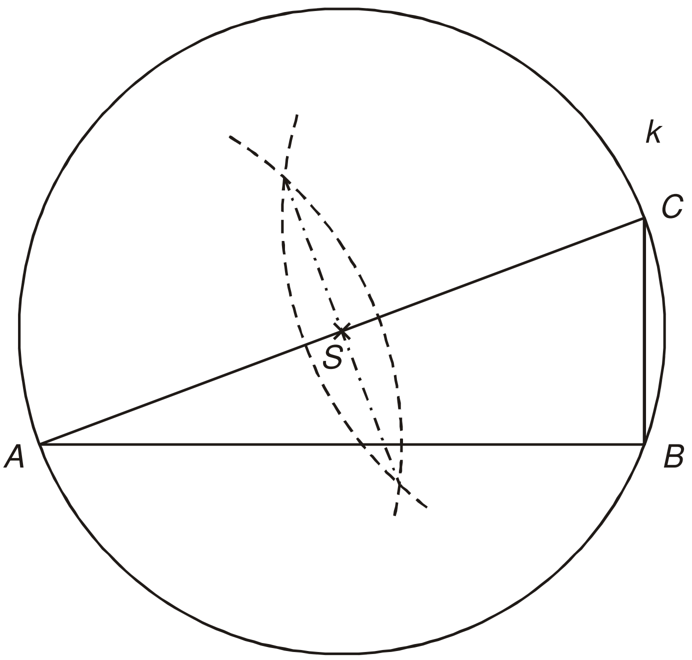
3.4.5 Využití Thaletovy věty, vzájemná poloha kružnic

Předpoklady: 030404

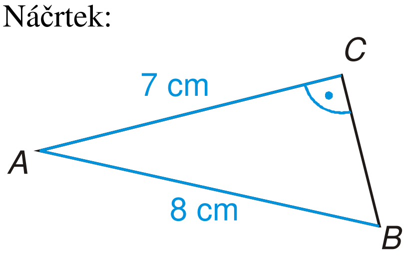
Př. 1: Narýsuj libovolný pravoúhlý trojúhelník. Sestroj co nejrychleji kružnici tomuto trojúhelníku opsanou.



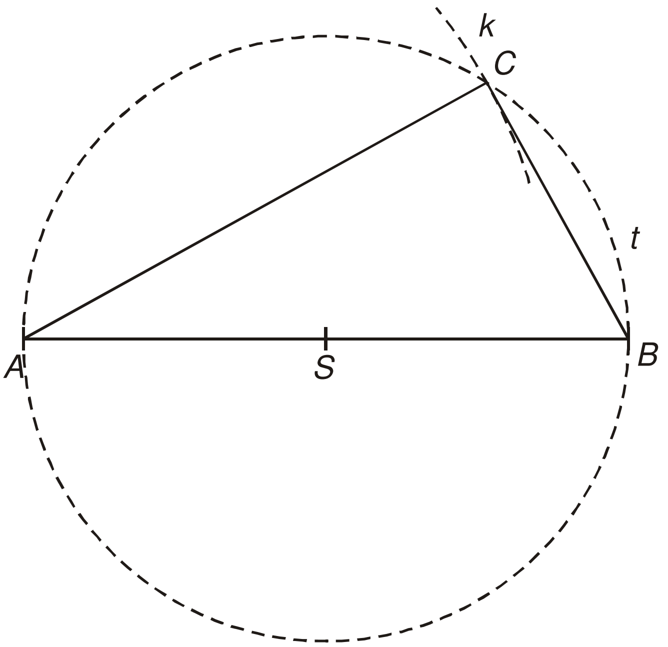
Stačí, když najdeme střed přepony AC, kružnice se středem S_{AC} procházející body A a C musí procházet i bodem B (podle Thaletovy věty).

Př. 2: Je dána (tzn. je narýsována) úsečka AB, $|AB| = 8\,\text{cm}$. Narýsuj bod C tak, aby trojúhelník ABC byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C a platilo $|AC| = b = 7\,\text{cm}$. Protože úsečka AB je dána, musíš ji narýsovat jako první.

Náčrtek:



Narýsujeme úsečku AB (musí být první). Bod C musí ležet na kružnici $k(A; b = 7\,\text{cm})$. Ještě musíme využít informaci o pravém úhlu ACB (a zjistit, kde na kružnici k bod C leží). Úhel ACB je pravý $\Rightarrow$ musí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem AB.

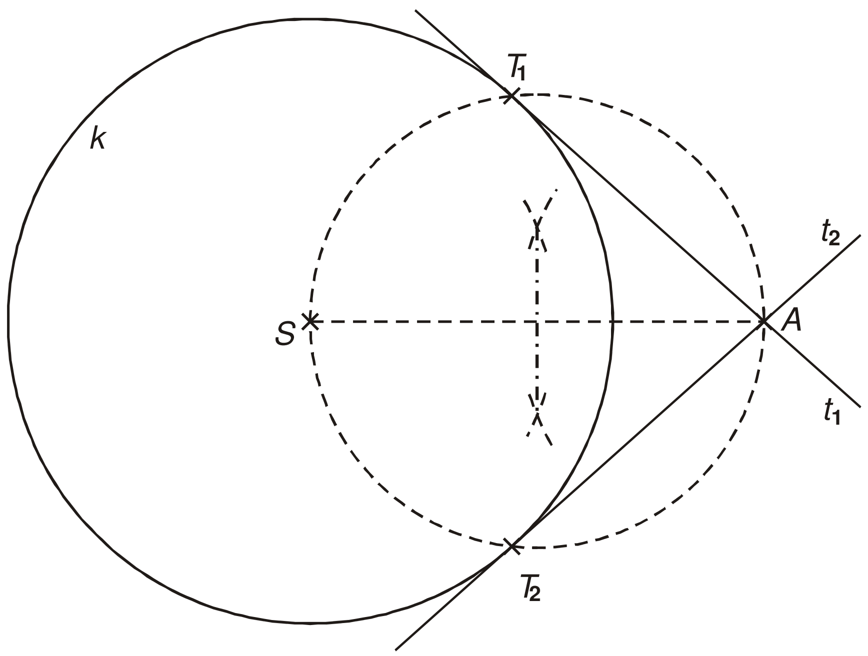


1. $AB; |AB| = c = 8\,\text{cm}$
2. $S; |SA| = |SB|; S \in AB$
3. $t(S; |SA|)$
4. $k(A; b = 7\,\text{cm})$
5. $C = k \cap t$
6. $\triangle ABC$

Dodatek: Thaletova kružnice nad průměrem AB se často označuje pomocí řeckého písmene τ jako τ_{AB}.

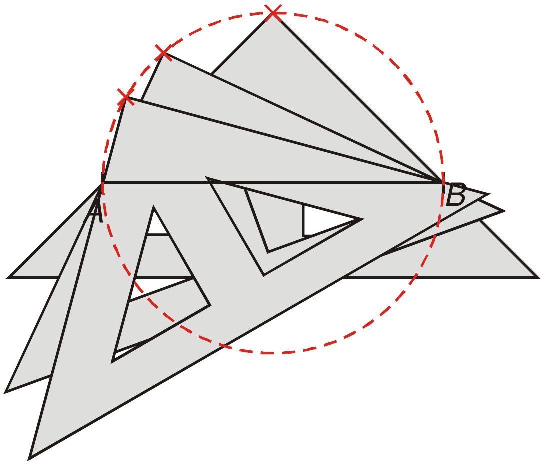
Př. 3: Je dána kružnice $k(S; 4\text{ cm})$ a bod A, $|SA| = 6\text{ cm}$. Sestroj tečny kružnice k z bodu A.

Postup známe z minulé hodiny, využijeme Thaletovu kružnici nad průměrem SA.

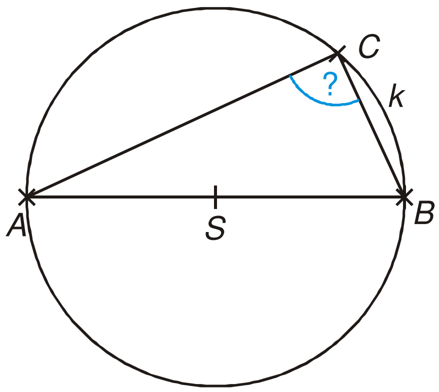


Př. 4: Najdi způsob, jak pomocí pravoúhlého trojúhelníku bez kružítka "narýsovat" kružnici (s vhodným poloměrem).

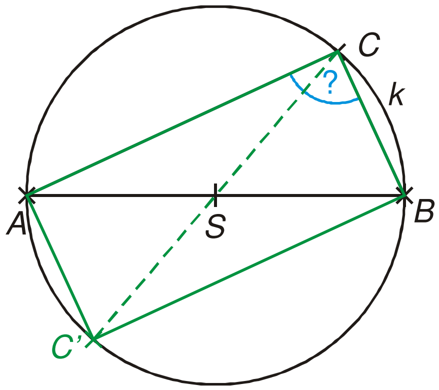
Využijeme Thaletovu větu (vrchol C pravoúhlého trojúhelníku s přeponou AB leží na kružnici s průměrem AB).
Narýsujeme úsečku AB.
Nastavíme trojúhelník tak, aby jeho odvěsny procházely body A, B $\Rightarrow$ vrchol trojúhelníku proti přeponě musí ležet na kružnici s průměrem AB $\Rightarrow$ vyznačíme tento bod.
Trojúhelník postupně natáčíme a vyznačujeme polohy vrcholu proti přeponě.



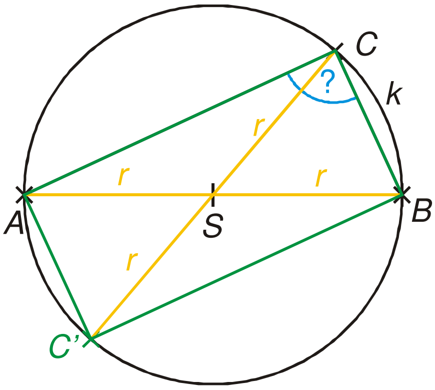
Př. 5: Thaletovu větu je možné dokázat i s využitím bodu, který je s bodem C středově souměrný se středem souměrnosti ve středu kružnice. Zkus dokončit tento důkaz.



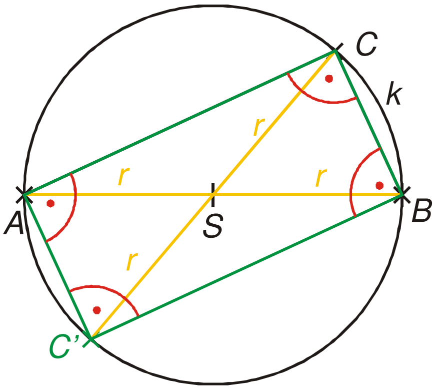
Potřebujeme určit velikost úhlu ACB. Bod C leží na kružnici k $\Rightarrow$ obraz tohoto bodu ve středové souměrnosti se středem v bodu S bude také ležet na kružnici k $\Rightarrow$ získáme čtyřúhelník $ACBC'$.



Platí $|AS| = |CS| = |BS| = |C'S| = r$ $\Rightarrow$ úhlopříčky čtyřúhelníku $ACBC'$ jsou shodné a navzájem se půlí.



Čtyřúhelník $ACBC'$ je obdélník nebo čtverec $\Rightarrow$ všechny jeho vnitřní úhly jsou pravé.



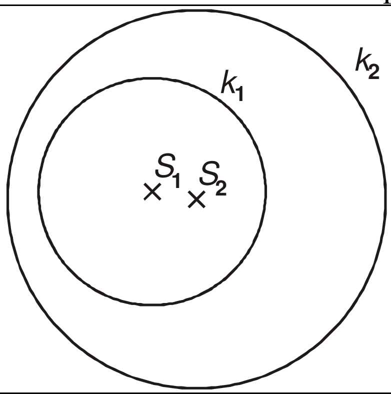
Úhel ACB je pravý.

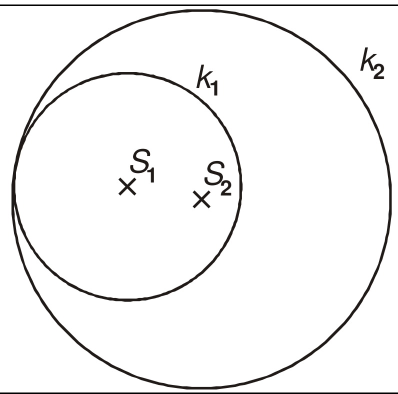
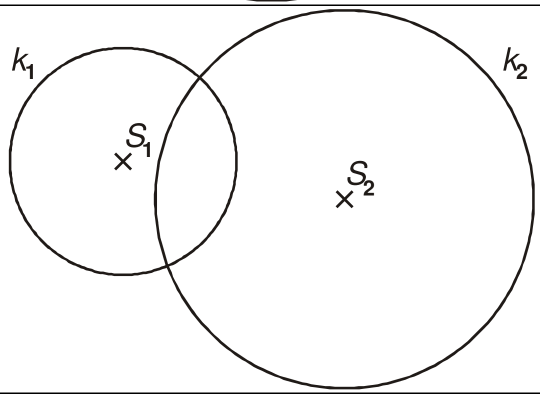
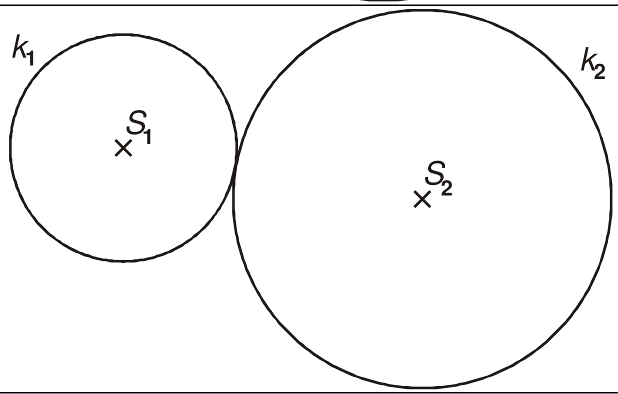
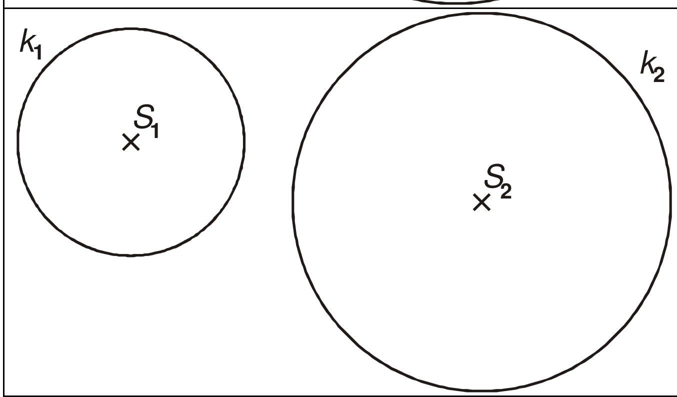
Př. 6: Najdi všechny možnosti vzájemné polohy dvou kružnic o různých poloměrech a zapiš je do tabulky. Které vzdálenosti rozhodují o druhu vzájemné polohy? Ještě před sepsáním tabulky přemýšlej tom, jak možnosti sestavit co nejsystematičtěji.

Dva extrémní případy:

- jedna kružnice leží uvnitř druhé,
- kružnice jsou daleko od sebe, neprotínají se.

$\Rightarrow$ začneme v jedné extrémní poloze (například jedna kružnice uvnitř druhé), postupně zvětšujeme vzdálenosti středů kružnic a přecházíme k druhému extrému.

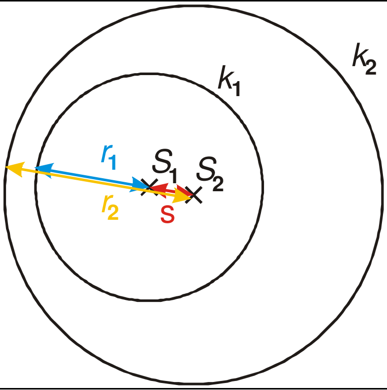
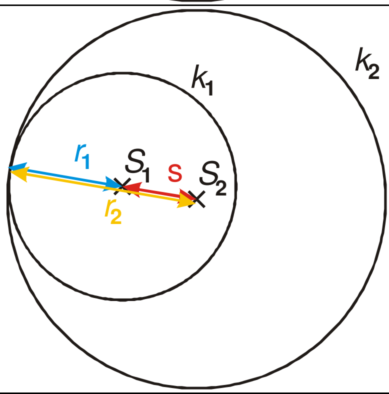
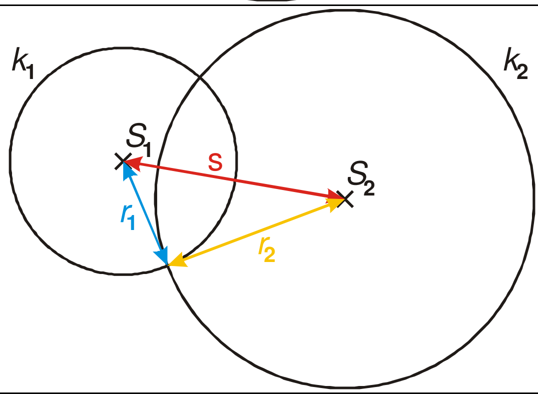
	Kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2.

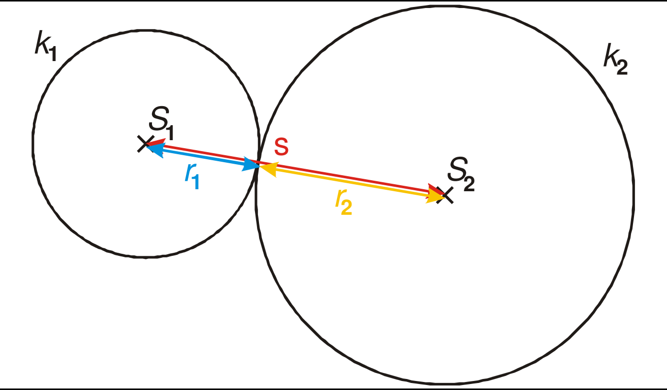
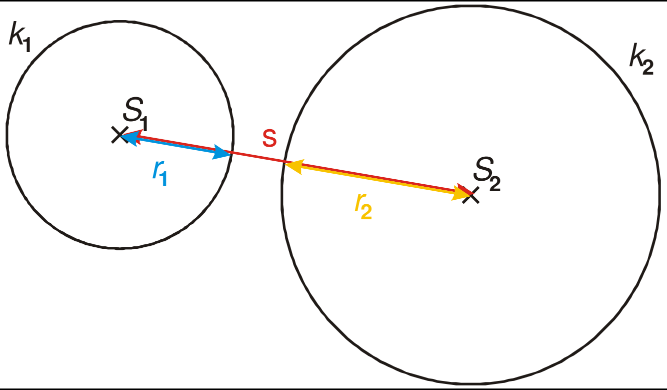
	Kružnice k_1 má vnitřní dotyk s kružnicí k_2.
	Kružnice k_1 se protíná s kružnicí k_2.
	Kružnice k_1 má vnější dotyk s kružnicí k_2.
	Kružnice k_1 nemá s kružnicí k_2 žádný společný bod (kružnice k_1 leží ve vnější oblasti kružnice k_2).

O druhu vzájemné polohy rozhodují velikosti obou kružnic a vzdálenost jejich středů.

Pedagogická poznámka: Na úvodní neorganizované kreslení nechávám jen chvíli, pak si zkontrolujeme, kolik možností existuje a bavíme se o tom, jak je co nejsystematičtěji zapsat. Velmi rychle někdo navrhne postupovat s menší kružnicí zevnitř ven (nebo obráceně), což využijeme i v následujícím příkladu.

Př. 7: Vzájemná poloha dvou kružnic $k_1(S_1;r_1)$ a $k_2(S_2;r_2)$ je určena poloměry r_1, r_2 obou kružnic a délkou středné $s = |S_1S_2|$. Najdi všechny možnosti vzájemné polohy dvou kružnic o různých poloměrech a různých středech. Napiš ke každé možnosti v přehledu vzájemné polohy dvou kružnic podmínku, kterou tyto tři velikosti musí splňovat (například pro případ, že kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2, platí $s < r_2 - r_1$).

	Kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2. $s < r_2 - r_1$ (protože $r_2 > s + r_1$)
	Kružnice k_1 má vnitřní dotyk s kružnicí k_2. $s = r_2 - r_1$
	Kružnice k_1 se protíná s kružnicí k_2. $r_2 - r_1 < s < r_2 + r_1$ (najednou platí trojúhelníkové nerovnosti $s < r_1 + r_2$ a $r_2 < s + r_1$)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Kružnice k_1 má vnější dotyk s kružnicí k_2.
$s = r_2 + r_1$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Kružnice k_1 nemá s kružnicí k_2 žádný společný bod (kružnice k_1 leží ve vnější oblasti kružnice k_2).
$s > r_2 + r_1$</td>
</tr>
</table>

Pedagogická poznámka: Následující cvičení je domácí úkol, který využíváme na začátku další hodiny.

Př. 8: Najdi doma alespoň dvě kola o různém průměru a změř u každého co nejpřesněji:
a) průměr kola b) obvod kola (délku kružnice).
Metodu měření zvol tak, aby výsledky byly co nejpřesnější.

Shrnutí: