3.3.6 Délka kružnice (obvod kruhu) I (P)

Předpoklady: 030305

Pedagogická poznámka: Hodina se dá stihnout (v závislosti na tom, kolik času strávíte povídaní okolo čísla π) za polovinu vyučovací hodiny.

Délka kružnice: vzdálenost, kterou bychom získali, kdybychom kružnici "přestřihli a natáhli do přímého směru.
Jak ji můžeme měřit?

- omotat kružnici provázkem a změřit délku provázku,
- použít krejčovský metr,
- odvalit předmět po rovině (pro přesnější měření i víckrát)

Délka kružnice (obvod kruhu) je zřejmě přímo úměrná jeho průměru (nebo poloměru): kolikrát se zvětší průměr, tolikrát se zvětší obvod.

Výsledky měření

předmět	hrnek	krytka	CD	lékovka	světlo	cyklo láhev
průměr [cm]	8	6,5	12	3,2	5	7,6
obvod [cm]	25,5	20,6	38	10	15,5	24
poměr	3,1875	3,1692	3,1667	3,125	3,1	3,1579

Průměrná hodnota: 3,15.

Pedagogická poznámka: Ve škole doplňujeme postupně naměřené hodnoty do excelovské tabulky a žáci tak mohou sledovat, že průměr se postupně (i přes někdy hodně velké chyby jednotlivých měření) blíží ke správné hodnotě.

Poměr mezi obvodem kruhu a jeho průměrem patří mezi nejdůležitější matematické konstanty, označujeme ho jako π (číslo pí, nebo také Ludolfovo číslo).
Číslo π:

- je iracionální (nejde zapsat zlomkem),
- je transcendentální (není řešením žádné algebraické rovnice),
- dnes je známo s přesností na několik biliónů desetinných míst,
- nejčastěji se používá přibližná hodnota 3,14 (nebo přibližná hodnota $\frac{22}{7}$),
- hodnota na padesát desetinných míst:
  $\pi \doteq 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510...$
- hodnota se určuje pomocí číselných řad, čím více členů do řady započítáme, tím přesnější hodnotu získáme:
  - $\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + ...$
  - $\pi = 2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot...\right)$
- pořádná kalkulačka má speciální tlačítko s hodnotou čísla π.

Pedagogická poznámka: Ve škole nechám dětem spočítat programem *y-cruncher* číslo π na několik desítek miliónů desetinných míst, aby viděli, že určit jeho hodnotu na více míst dnes není žádný problém.

Pedagogická poznámka: Ve všech následujících příkladech píšu na tabuli π (nikde ne přibližných 3,14) a chci po žácích, aby na kalkulačkách používali jeho uloženou hodnotu. Výsledky by pak měli vycházet přesně jako u mě.

Př. 1: Vypočti obvod kruhu, jehož průměr je: a) $10\,\text{cm}$, b) $3{,}5\,\text{m}$.
Výsledek udávej na tři platné číslice.

a) $10\,\text{cm}$: $o = \pi \cdot d = \pi \cdot 10\,\text{cm} = 31{,}4\,\text{cm}$

b) $3{,}5\,\text{m}$: $o = \pi \cdot d = \pi \cdot 3{,}5\,\text{m} = 11{,}0\,\text{m}$

Př. 2: Vypočti obvod kruhu, jehož poloměr je: a) $100\,\text{m}$ b) $\frac{3}{7}\,\text{km}$.
Výsledek udávej na tři platné číslice.

a) $10\,\text{cm}$: $o = \pi \cdot d = \pi \cdot 2 \cdot r = \pi \cdot 2 \cdot 100\,\text{m} = 628\,\text{m}$

b) $\frac{3}{7}\,\text{km}$: $o = \pi \cdot 2 \cdot r = \pi \cdot 2 \cdot \frac{3}{7}\,\text{km} = 2{,}69\,\text{km}$

Př. 3: Vypočti průměr kruhu, jehož obvod je: a) $8\,\text{cm}$, b) $23{,}9\,\text{cm}$.
Výsledek udávej na tři platné číslice.

Když počítáme obvod z průměru, násobíme průměr číslem π $\Rightarrow$ při výpočtu průměru z obvodu musíme obvod číslem π vydělit.

a) $8\,\text{cm}$: $d = \frac{o}{\pi} = \frac{8}{\pi}\,\text{cm} = 2{,}55\,\text{cm}$

b) $23{,}9\,\text{cm}$: $d = \frac{o}{\pi} = \frac{23{,}9}{\pi}\,\text{cm} = 7{,}61\,\text{cm}$

Př. 4: Obvod kruhu se značí *o*, průměr *d*, poloměr *r*. Napiš vzorec pro výpočet obvodu kruhu: a) ze známého průměru, b) ze známého poloměru.

a) vzorec pro obvod ze známého průměru: $o = \pi d$.

b) vzorec pro obvod ze známého poloměru: $o = 2\pi r$

Př. 5: Z předchozích vzorců vyjádři: a) průměr b) poloměr.

$o = \pi d \quad / : \pi$

$d = \frac{o}{\pi}$

$$o = 2\pi r \qquad / : 2\pi$$

$$r = \frac{o}{2\pi}$$

Shrnutí: Poměr mezi obvodem a průměrem kružnice je ve všech případech stejné číslo, označujeme ho π.