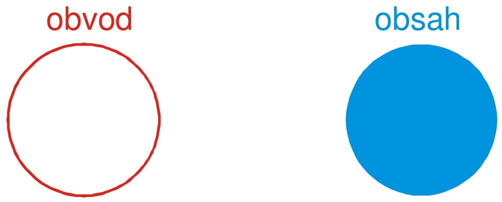
3.4.8 Obsah kruhu I

Předpoklady: 030407

Př. 1: Jaký je rozdíl mezi obvodem a obsahem? V jakých jednotkách se udává obvod, v jakých obsah?

Obvod je délka hranice (provázku, kterým bychom útvar ohraničili) $\Rightarrow$ udává se v jednotkách délky (m, cm, km, ...).
Obsah představuje velikost ohraničené plochy $\Rightarrow$ udává se ve čtverečních jednotkách (m^2, cm^2, km^2, ...).

Obrázkem:



Př. 2: Sepiš vzorce, které jsme se dosud učili, pro obvod a obsah různých útvarů. Co mají společného vzorce pro obvod? Co mají společného vzorce pro obsah?

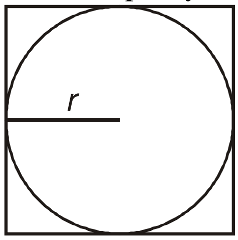
čtverec	$o=4a$	$S=a^2$
obdélník	$o=2a+2b$	$S=ab$
trojúhelník	$o=a+b+c$	$S=\frac{av_a}{2}$
lichoběžník	$o=a+b+c+d$	$S=\frac{(a+c)v}{2}$

Všechny vzorce pro obvod obsahují pouze sčítání délek (nebo délek vynásobených čísly).

Všechny vzorce pro obsah obsahují pouze součiny dvou délek (součet $a+c$ je také délka).

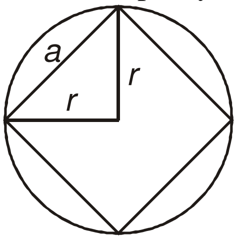
Př. 3: Do obrázku kružnice vepiš a opiš čtverec. Urči obsahy těchto čtverců v případě, že kružnice má poloměr *r*. Co můžeme tvrdit o obsahu kružnice, která má poloměr *r*?

Čtverec opsaný kružnici:



Strana čtverce má délku $2r$ $\Rightarrow$ obsah čtverce: $S=a^2=(2r)^2=4r^2$.

Čtverec vepsaný kružnici:



Délku strany čtverce můžeme určit pomocí Pythagorovy věty: $a^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$

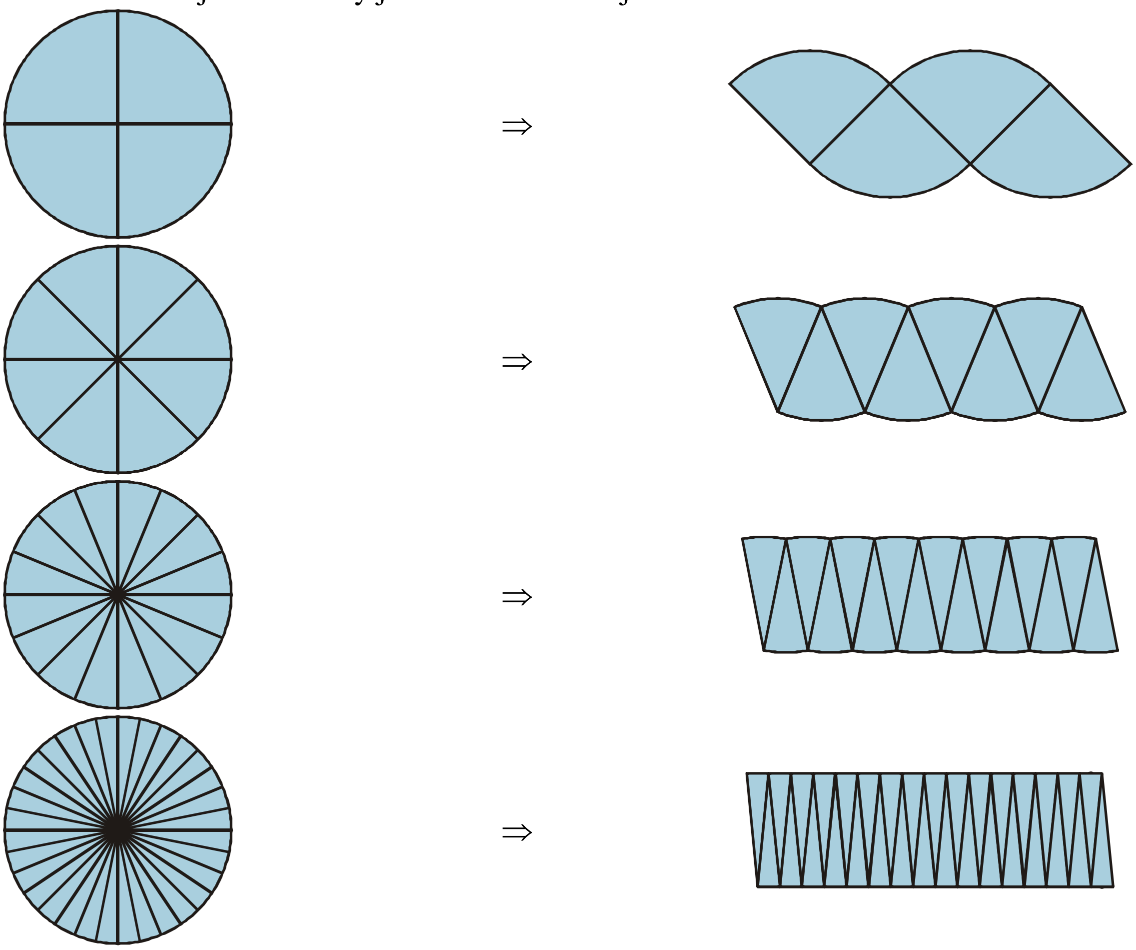
Obsah čtverce: $S = a^2 = 2r^2$.

Obsah kružnice, která má poloměr r, bude určitě větší než $2r^2$ a menší než $4r^2$.

Pedagogická poznámka: Nečekáme, až většina třídy vyřeší obsah vepsaného čtverce, jen si společně zkontrolujeme výsledek a řekneme si, jaký by měl být obsah kruhu.

Př. 4: Vzorec pro obsah kružnice můžeme snadno odvodit, když si představíme, že kružnici rozřežeme na mnoho velmi tenkých výsečí (jako když krájíme dort pro velký počet jedlíků) a tyto kousky pak vhodně přerovnáme, abychom z nich získali tvar podobný jednomu z útvarů, jejichž obsahy už jsme počítali. Zkus tento vzorec odvodit.

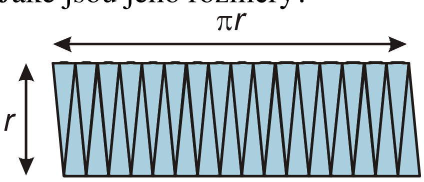
Zkusíme kružnici krájet na kousky jako dort a skládat je na talířek.



Čím menší měsíčky nakrájíme, tím více se útvar, který z nich můžeme poskládat, blíží obdélníku. Kdybychom nařezali nekonečně mnoho nekonečně tenkých kousků, získali bychom přesně obdélník.

Pedagogická poznámka: Nechávám žákům čas, aby našli rozměry obdélníku a tedy i vzorec sami.

Jaké jsou jeho rozměry?



Obsah obdélníku: $S = ab = r \cdot \pi r = \pi r^2$.

Př. 5: Zkontroluj, zda získaný vzorec odpovídá očekáváním, na která jsme přišli během hodiny.

Podle příkladů ze začátku hodiny by správný vzorec měl:

- obsahovat součin dvou délek: splněno druhou mocninou poloměru,
- vyhovovat nerovnosti pro obsah kruhu, čtverce opsaného a vepsaného: splněno, protože platí $2 < \pi < 4 \Rightarrow$ platí i $2r^2 < \pi r^2 < 4r^2$,

$\Rightarrow$ náš vzorec může být správný vzorec pro obsah kruhu.

Obsah kruhu o poloměru *r* je dán vztahem $S = \pi r^2$.

Př. 6: Urči obsah kruhu o poloměru:
a) $6\,\mathrm{cm}$ b) $230\,\mathrm{m}$ c) $0{,}07\,\mathrm{km}$

a) $6\,\mathrm{cm}$: $S = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2\ \mathrm{cm}^2 = 113\,\mathrm{cm}^2$

b) $230\,\mathrm{m}$: $S = \pi r^2 = \pi \cdot 230^2\ \mathrm{m}^2 = 166\,000\,\mathrm{m}^2$

c) $0{,}07\,\mathrm{km}$: $S = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}07^2\ \mathrm{km}^2 = 0{,}0154\,\mathrm{km}^2$

Shrnutí: Pro obsah kruhu platí vztah $S = \pi r^2$.