

### 3.2.4 Počet řešení rovnice

**Předpoklady:** 030203

**Př. 1:** Dosad' postupně čísla  $\{0; 1; 2; 3\}$  do rovnice  $(x-1)(x-3)(x+1) = 0$ . Která z nich jsou jejím řešením? Existuje ještě další číslo, které je řešením této rovnice?

Dosazujeme:

- $x = 0$ :  
 $(0-1)(0-3)(0+1) = (-1) \cdot (-3) \cdot 1 = 3 \neq 0$   
 $3 \neq 0$  - neplatná rovnost  $\Rightarrow 0$  není řešením rovnice,
- $x = 1$ :  
 $(1-1)(1-3)(1+1) = 0 \cdot (-2) \cdot 2 = 0$   
 $0 = 0$  - platná rovnost  $\Rightarrow 1$  je řešením rovnice,
- $x = 2$ :  
 $(2-1)(2-3)(2+1) = 1 \cdot (-1) \cdot 3 = 3 \neq 0$   
 $3 \neq 0$  - neplatná rovnost  $\Rightarrow 2$  není řešením rovnice,
- $x = 3$ :  
 $(3-1)(3-3)(3+1) = 2 \cdot 0 \cdot 4 = 0$   
 $0 = 0$  - platná rovnost  $\Rightarrow 3$  je řešením rovnice,

Z nabízených čísel jsou řešením rovnice čísla 1 a 3.

Rovnice vyšla vždy, když jedna ze závorek, které se v rovnici násobí, byla nulová. Poslední závorkou je závorka  $(x+1) \Rightarrow$  dalším řešením bude zřejmě číslo -1. Zkusíme ho dosadit.

- $x = -1$ :  
 $(-1-1)(-1-3)(-1+1) = (-2) \cdot (-4) \cdot 0 = 0$   
 $0 = 0$  - platná rovnost  $\Rightarrow -1$  je řešením rovnice,

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je velmi zajímavý z hlediska toho, jak žáci uvažují. Ti nejhorší si ani nevšimnou, že mají hledat další kořen. Ti lepší zkusí dosadit 5 (nalezené kořeny byla lichá čísla, 5 je další na řadě) a Ti, kteří uvažují opravdu matematicky, už ví, že další kořenem je -1 kvůli vynulování závorky, protože už během řešení sledovali, "co se v rovnici děje". Po kontrole řešení se bavíme i o této poznámce a ukazujeme, co je vnitřní podstatná podobnost (nulování závorek, které nulují levou stranu rovnice) a co je nepodstatná vnější podobnost (lichá čísla od 1 výše) bez logického základu.

**Pedagogická poznámka:** Smyslem předchozího příkladu rozhodně není postup na řešení rovnic v součinném tvaru.

**Př. 2:** Z množiny čísel  $\{-1; 0; 1; 2\}$  vyber ta, která jsou řešením rovnice:

a)  $3(x-1)+1=2(x-1)+x$       b)  $x(x-1)=2$       c)  $x^2+2=3x$

Ve všech případech zkusíme dosazovat nabízené hodnoty, pokud získáme platné rovnosti, dosazená čísla jsou řešením rovnice.

a)  $3(x-1)+1=2(x-1)+x$

- $x = -1$ :  
 $3(-1-1)+1=2(-1-1)+(-1)$   
 $3(-2)+1=2(-2)+(-1)$   
 $-5 = -5$  - platná rovnost  $\Rightarrow -1$  je řešením rovnice,
- $x = 0$ :  
 $3(0-1)+1=2(0-1)+0$   
 $3(-1)+1=2(-1)+0$   
 $-2 = -2$  - platná rovnost  $\Rightarrow 0$  je řešením rovnice,
- $x = 1$ :  
 $3(1-1)+1=2(1-1)+1$   
 $3 \cdot 0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1$   
 $1 = 1$  - platná rovnost  $\Rightarrow 1$  je řešením rovnice,
- $x = 2$ :  
 $3(2-1)+1=2(2-1)+2$   
 $3 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot 1 + 2$   
 $4 = 4$  - platná rovnost  $\Rightarrow 2$  je řešením rovnice.

b)  $x(x-1)=2$

- $x = -1$ :  
 $(-1)(-1-1)=(-1)(-2)=2$   
 $2 = 2$  - platná rovnost  $\Rightarrow -1$  je řešením rovnice,
- $x = 0$ :  
 $0 \cdot (0-1) = 0$   
 $0 \neq 2$  - neplatná rovnost  $\Rightarrow 0$  není řešením rovnice,
- $x = 1$ :  
 $1 \cdot (1-1) = 0$   
 $0 \neq 2$  - neplatná rovnost  $\Rightarrow 1$  není řešením rovnice,
- $x = 2$ :  
 $2 \cdot (2-1) = 2 \cdot 1 = 2$   
 $2 = 2$  - platná rovnost  $\Rightarrow 2$  je řešením rovnice.

c)  $x^2+2=3x$

- $x = -1$ :  
 $(-1)^2+2=3(-1)$   
 $3 \neq -3$  - neplatná rovnost  $\Rightarrow -1$  není řešením rovnice,

- $x = 0$ :  
 $0^2 + 2 = 3 \cdot 0$   
 $2 \neq 0$  - neplatná rovnost  $\Rightarrow 0$  není řešením rovnice,
- $x = 1$ :  
 $1^2 + 2 = 3 \cdot 1$   
 $3 = 3$  - platná rovnost  $\Rightarrow 1$  je řešením rovnice,
- $x = 2$ :  
 $2^2 + 2 = 3 \cdot 2$   
 $2 = 2$  - platná rovnost  $\Rightarrow 2$  je řešením rovnice.

Nejzajímavější z rovnic je rovnice  $3(x-1)+1=2(x-1)+x$ . Všechna zkoušená čísla byla jejími kořeny.

**Př. 3:** Dosad' za  $x$  do rovnice  $3(x-1)+1=2(x-1)+x$  libovolné číslo a vyzkoušej, zda je jejím řešením.

Zkusíme například  $x = 10$ :  $3(10-1)+1=2(10-1)+10$

$$3 \cdot 9 + 1 = 2 \cdot 9 + 10$$

$$27 + 1 = 18 + 10$$

$28 = 28$  - platná rovnost  $\Rightarrow 10$  je řešením rovnice.

Něco exotičtějšího:  $x = \sqrt{\pi}$ :  $3(\sqrt{\pi}-1)+1=2(\sqrt{\pi}-1)+\sqrt{\pi}$

$$3\sqrt{\pi} - 3 + 1 = 2\sqrt{\pi} - 2 + \sqrt{\pi}$$

$3\sqrt{\pi} - 2 = 3\sqrt{\pi} - 2$  - platná rovnost  $\Rightarrow \sqrt{\pi}$  je řešením rovnice.

Zřejmě řešením rovnice  $3(x-1)+1=2(x-1)+x$  je každé číslo.

**Pedagogická poznámka:** Motivuji žáky, aby dosadili, co "nejdivnější číslo" a dovoluji i kalkulačky, takže máme dosazováním ověřeny i hodně obskurní výsledky jako  $x = 123584777$ .

**Př. 4:** Najdi důvod, proč řešením rovnice  $3(x-1)+1=2(x-1)+x$  je každé reálné číslo.

Stačí roznásobit závorky a vidíme, že na obou stranách rovnice je to samé, jenom jinak napsané.

$$3(x-1)+1=2(x-1)+x$$

$$3x-3+1=2x-2+x$$

$$3x-2=3x-2$$

Že má rovnice nekonečně mnoho řešení, je jasné v okamžiku, kdy zjistíme, že na obou stranách je to samé. Přesto se ještě někdy upravuje dále:

$$3x-2=3x-2 \quad / +2$$

$$3x=3x \quad / -3x$$

$0 \cdot x = 0 \Rightarrow$  Rovnice má nekonečně mnoho řešení, protože ať dosadíme za  $x$  cokoliv, po vynásobení nulou bude pravá strana rovna nule a bud se tak rovnat levé straně.

**Př. 5:** Najdi všechny kořeny uvedených rovnic.

a)  $2x - 3 = x + 1$       b)  $5(x + 1) - 3 = 2(x + 1) + 3x$       c)  $2x + 5 = 3(x + 1) + 2$   
d)  $7(x + 2) - 2 = 5x + 2(x + 3)$       e)  $x^2 = 3x$

a)  $2x - 3 = x + 1 \quad / +3$   
 $2x = x + 4 \quad / -x$   
 $x = 4$

b)  $5(x + 1) - 3 = 2(x + 1) + 3x$   
 $5x + 5 - 3 = 2x + 2 + 3x$   
 $5x + 2 = 5x + 2 \quad / -2$   
 $5x = 5x \quad / -5x$   
 $0 = 0$  Řešením jsou všechna reálná čísla.

c)  $2x + 5 = 3(x + 1) + 2$   
 $2x + 5 = 3x + 3 + 2$   
 $2x + 5 = 3x + 5 \quad / -5$   
 $2x = 3x \quad / -2x$   
 $0 = x$

d)  $7(x + 2) - 2 = 5x + 2(x + 3)$   
 $7x + 14 - 2 = 5x + 2x + 6$   
 $7x + 12 = 7x + 6 \quad / -12$   
 $7x = 7x - 6 \quad / -7x$   
 $0 = -6$   
Řešením není žádné číslo.

e)  $x^2 = 3x \quad / : x$  (nesmí být nula)  
 $x = 3$   
Ještě vyzkoušíme  $x = 0$ .  
 $0^2 = 3 \cdot 0$   
 $0 = 0$  Platná rovnost  $\Rightarrow$  i 0 je řešením.

Skutečnost, že rovnice  $7(x + 2) - 2 = 5x + 2(x + 3)$  nemá řešení, byla zřejmá už ve chvíli, kdy jsme dospěli do tvaru  $7x + 12 = 7x + 6$ : počet  $x$  je na obou stranách stejný  $\Rightarrow$  dosazením získáme na obou stranách stejné číslo, ale protože se k tomuto číslu na obou stranách přičítá něco jiného, rovnost nikdy nenastane  $\Rightarrow$  rovnice nemá žádné řešení.

**Př. 6:** Jak vypadá po úpravách rovnice, která má:

a) nekonečně mnoho řešení      b) žádné řešení.

a) nekonečně mnoho řešení

Rovnice má nekonečně mnoho řešení, pokud ji můžeme upravit na tvar  $0x = 0$ .

b) žádné řešení

Rovnice nemá žádné řešení, pokud ji můžeme upravit na tvar  $0 = \text{číslo různé od nuly}$ .

**Př. 7:** Čím se vyznačovali rovnice, se kterými jsme se setkali v této hodině a které měly právě dvě řešení?

Všechny rovnice, které měly právě dvě řešení, obsahovaly druhou mocninu.

**Pedagogická poznámka:** Při kontrole si připomínáme, že tento postřeh by během hodiny měli učinit všichni automaticky.

**Shrnutí:** Rovnice může mít nekonečně mnoho nebo i žádné řešení.

