

3.5.11 Vyjádření neznámé ze vzorce III

Předpoklady: 030510

Pedagogická poznámka: Rychlejší část třídy zatuhne na příkladu 3, kde je se zbytkem dohoníme.

Př. 1: Vyjádři ze vzorců neznámou v závorce.

a) $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ $\{F_2\}$ b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ $\{r\}$ c) $s = s_0 + vt$ $\{v\}$ d) $c^2 = a^2 + b^2$ $\{b\}$

a) $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ $/ \cdot S_2$

$$F_2 = \frac{S_2 \cdot F_1}{S_1}$$

b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ $/ \cdot 3$

$$3V = \pi r^2 v$$

$$\frac{3V}{\pi v} = r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi v}}$$

c) $s = s_0 + vt$ $/ - s_0$

$$s - s_0 = vt$$

$$v = \frac{s - s_0}{t}$$

d) $c^2 = a^2 + b^2$ $/ - a^2$

$$c^2 - a^2 = b^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Dodatek: Jiná (u žáků častá) možnost řešení bodu b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ $/ : \frac{1}{3}$

$$\frac{V}{\frac{1}{3}} = \pi r^2 v$$

$$/ : \pi v$$

$$\frac{V}{\frac{\pi v}{3}} = r^2$$

$$/ \sqrt{\quad}$$

$r = \sqrt{\frac{V}{\frac{\pi v}{3}}}$. Úpravou složeného zlomku samozřejmě získáme stejný výsledek jako

$$\text{v řešení: } r = \sqrt{\frac{V}{\frac{\pi v}{3}}} = \sqrt{\frac{V}{1} \cdot \frac{3}{\pi v}} = \sqrt{\frac{V \cdot 3}{1 \cdot \pi v}} = \sqrt{\frac{3V}{\pi v}}$$

Pedagogická poznámka: Pokud se v bodu b) objeví (velmi pravděpodobně) jiná než uvedená řešení, je třeba je na tabuli dopravit na normální výsledek a tak ukázat, že k výsledku vedou různé cesty a pokud se dodržují pravidla, na jejich volbě příliš

nezávisí. Jsem přesvědčený, že toto poznání je zásadní, aby se žáci nebáli postupovat jinak než standardní cestou.

Př. 2: Vyjádři ze vzorců neznámou v závorce.

$$\text{a) } F_{vz} = V \rho g \quad \{V\} \qquad \text{b) } V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \{r\} \qquad \text{c) } Q = mc(t_1 - t_2) \quad \{c; t_2\}$$

$$\text{a) } F_{vz} = V \rho g \quad /: \rho g$$

$$V = \frac{F_{vz}}{\rho g}$$

$$\text{b) } V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \{r\}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad /: 3$$

$$3V = 4\pi r^3 \quad /: 4\pi$$

$$\frac{3V}{4\pi} = r^3 \quad / \sqrt[3]{\quad}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$\text{c) } Q = mc(t_1 - t_2) \quad / m(t_1 - t_2)$$

$$c = \frac{Q}{m(t_1 - t_2)}$$

$$Q = mc(t_1 - t_2) \quad /: mc$$

$$\frac{Q}{mc} = t_1 - t_2 \quad / + t_2$$

$$t_2 + \frac{Q}{mc} = t_1 \quad / - \frac{Q}{mc}$$

$$t_2 = t_1 - \frac{Q}{mc}$$

Pedagogická poznámka: V bodu b) se objevují další dvě verze výsledku $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}}$ a

$$r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{4}V}{\pi}}, \text{ které se dají odstraněním složeného zlomku převést na tvar } r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Některé vzorce z matematiky:

- $o = a + b + c$,
- $o = 4a$,
- $o = 2a + 2b$.

Co mají všechny vzorce společného?

Levá strana:

- obvod o , tedy vzdálenost v metrech.

Pravá strana:

- a, b, c – délky stran, tedy vzdálenosti v metrech,
- $4a$ - čtyřnásobek délky strany, tedy vzdálenost v metrech,
- $2a, 2b$ - dvojnásobky délek stran, tedy vzdálenosti v metrech.

Zdá se, že sčítat a porovnávat mezi sebou můžeme jen členy, které znamenají to samé (v předchozích příkladech vzdálenosti v metrech).

Jak je to u vzorců pro obsah?

- $S = a^2$,
- $S = ab$,
- $S = \frac{av_a}{2}$,
- $P = 2ab + 2ac + 2bc$.

Levá strana:

- Obsah S , povrch P , tedy plocha v m^2 .

Pravá strana:

- a^2 – druhá mocnina délky strany, tedy plocha v m^2 ,
- ab - součin dvou délek, tedy plocha v m^2 ,
- $\frac{av_a}{2}$ - polovina součinu dvou délek, tedy plocha v m^2 ,
- $2ab, 2bc, 2ac$ - dvojnásobky součinů dvou délek, tedy plocha v m^2 .

Opět sčítáme a porovnáваме mezi sebou jen členy, které znamenají to samé (v druhé várce plochu v m^2).

Sčítat, odčítat a porovnávat mezi sebou můžeme pouze členy, které mají stejný význam (stejnou jednotku).

Př. 3: Které z vyjádřených vztahů jsou určité špatně? Proč?

a) $r = \frac{S}{2\pi}$ b) $a = \frac{P-2b}{2(b+c)}$ c) $a = \frac{o}{b+c}$

a) $r = \frac{S}{2\pi}$ - špatný vzorec, na levé straně je délka (v metrech), na pravé straně je obsah (v m^2) (je tam pouze děleno číslem).

b) $a = \frac{P-2b}{2(b+c)}$ - špatný vzorec, v čitateli zlomku na pravé straně se odečítá od obsahu (v m^2) délka (v metrech).

c) $a = \frac{o}{b+c}$ - špatný vzorec, na levé straně je délka (v metrech), na pravé dělíme obvod (v metrech), délkou (v metrech).

Př. 4: Vyjádři ze vzorců neznámou v závorce.

a) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ { C, C_2 } b) $S = 2ab + 2bc + 2ac$ { a, b } c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$ { a, f }

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} && / \cdot CC_1C_2 \\ C_1C_2 &= CC_2 + CC_1 \\ C_1C_2 &= C(C_2 + C_1) && / : (C_2 + C_1) \\ C &= \frac{C_1C_2}{C_2 + C_1} \\ \\ C_1C_2 &= CC_2 + CC_1 && / -CC_1 \\ C_1C_2 - CC_1 &= CC_2 \\ C_1(C_2 - C) &= CC_2 && / : (C_2 - C) \\ C_1 &= \frac{CC_2}{C_2 - C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } S &= 2ab + 2bc + 2ac && / -2bc \\ S - 2bc &= 2ab + 2ac \\ S - bc &= a(2b + 2c) && / : (2b + 2c) \\ a &= \frac{S - bc}{2b + 2c} \\ \\ S &= 2ab + 2bc + 2ac && / -2ab \\ S - 2ab &= 2bc + 2ac \\ S - 2ab &= c(2b + 2a) && / : (2a + 2b) \\ c &= \frac{S - ab}{2a + 2b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{f} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} && / \cdot aa'f \\ aa' &= a'f + af && / -af \\ aa' - af &= a'f \\ a(a' - f) &= a'f && / : (a' - f) \\ a &= \frac{a'f}{a' - f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{f} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} && / \cdot aa'f \\ aa' &= a'f + af \\ aa' &= (a' + a)f && / : (a' + a) \\ f &= \frac{aa'}{a' + a} \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Na bodu a) dokumentuji skutečnost, že pravidlo pro kontrolu vzorce pomocí jednotek (sčítání a porovnávání členů stejného typu) můžeme použít i u vzorce, jehož význam vůbec nechápeme. Jednotku kapacity C Farad [1 F] žáci samozřejmě neznají (a já jim ji ani neříkám). Můžeme ale předpokládat, že nějakou jednotku veličina C má (řekněme ji třeba Čenda) a tak interpretovat i rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (\text{všechny členy mají význam } \frac{1}{\text{Čenda}}) \\ C_1C_2 &= CC_2 + CC_1 \quad (\text{všechny členy mají význam } \text{Čenda}^2) \\ C &= \frac{C_1C_2}{C_2 + C_1} \quad (\text{vlevo je Čenda, vpravo podíl } \frac{\text{Čenda}^2}{\text{Čenda}} = \text{Čenda}). \end{aligned}$$

Př. 5: Z kalorimetrické rovnice $c_1m_1(t_1 - t) = m_2c_2(t - t_2)$ vyjádři: a) c_2 b) t_2 c) t .

$$\begin{aligned} \text{a) } c_2 & \\ c_1m_1(t_1 - t) &= m_2c_2(t - t_2) && / m_2(t - t_2) \\ \frac{c_1m_1(t_1 - t)}{m_2(t - t_2)} &= c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } t_2 & \\ c_1m_1(t_1 - t) &= m_2c_2(t - t_2) && / m_2c_2 \\ \frac{c_1m_1(t_1 - t)}{m_2c_2} &= t - t_2 && / -t \end{aligned}$$

$$\frac{c_1 m_1 (t_1 - t)}{m_2 c_2} - t = -t_2 \quad / \cdot (-1)$$

$$t_2 = t_1 - \frac{c_1 m_1 (t_1 - t)}{m_2 c_2}$$

c) t

$$c_1 m_1 t_1 - c_1 m_1 t = m_2 c_2 t - m_2 c_2 t_2 \quad / + c_1 m_1 t$$

$$c_1 m_1 t_1 = m_2 c_2 t - m_2 c_2 t_2 + c_1 m_1 t \quad / + m_2 c_2 t_2$$

$$c_1 m_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 = m_2 c_2 t + c_1 m_1 t$$

$$c_1 m_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 = (m_2 c_2 + c_1 m_1) t \quad / : (m_2 c_2 + c_1 m_1)$$

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_2 c_2 + c_1 m_1}$$

Shrnutí: