3.2.11 Vyjádření neznámé ze vzorce III

Předpoklady: 030210

Pedagogická poznámka: Rychlejší část třídy zatuhne na příkladu 3, kde je se zbytkem dohoníme.

Př. 1: Vyjádři ze vzorců neznámou v závorce.

a) $\frac{F_1}{S_1}=\frac{F_2}{S_2}$ $\{F_2\}$ b) $V=\frac{1}{3}\pi r^2 v$ $\{r\}$ c) $s=s_0+vt$ $\{v\}$ d) $c^2=a^2+b^2$ $\{b\}$

a) $\frac{F_1}{S_1}=\frac{F_2}{S_2}$ $\quad / \cdot S_2$

$F_2=\frac{S_2\cdot F_1}{S_1}$

b) $V=\frac{1}{3}\pi r^2 v$ $\quad / \cdot 3$

$3V=\pi r^2 v$ $\quad / : \pi v$

$\frac{3V}{\pi v}=r^2$ $\quad / \sqrt{\ }$

$r=\sqrt{\frac{3V}{\pi v}}$

c) $s=s_0+vt$ $\quad / -s_0$

$s-s_0=vt$ $\quad / : t$

$v=\frac{s-s_0}{t}$

d) $c^2=a^2+b^2$ $\quad / -a^2$

$c^2-a^2=b^2$ $\quad / \sqrt{\ }$

$b=\sqrt{c^2-a^2}$

Dodatek: Jiné (u žáků častá) možnost řešení bodu b) $V=\frac{1}{3}\pi r^2 v$ $\quad / : \frac{1}{3}$

$\frac{V}{\frac{1}{3}}=\pi r^2 v$ $\quad / : \pi v$

$\frac{V}{\frac{\pi v}{3}}=r^2$ $\quad / \sqrt{\ }$

$r=\sqrt{\frac{V}{\frac{\pi v}{3}}}$. Úpravou složeného zlomku samozřejmě získáme stejný výsledek jako v řešení: $r=\sqrt{\frac{V}{\frac{\pi v}{3}}}=\sqrt{\frac{V}{1}:\frac{\pi v}{3}}=\sqrt{\frac{V}{1}\cdot\frac{3}{\pi v}}=\sqrt{\frac{3V}{\pi v}}$.

Pedagogická poznámka: Pokud se v bodu b) objeví (velmi pravděpodobné) jiná než uvedená řešení, je třeba je na tabuli doupravit na normální výsledek a tak ukázat, že k výsledku vedou různé cesty a pokud se dodržuji pravidla, na jejich volbě příliš nezávisí. Jsem přesvědčený, že tato poznání je zásadní, aby se žáci nebáli postupovat jinak než standardní cestou.

Př. 2: Vyjádři ze vzorců neznámou v závorce.

a) $F_{vz} = V\rho g \ \{V\}$ b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \ \{r\}$ c) $Q = mc(t_1 - t_2) \ \{c; t_2\}$

a) $F_{vz} = V\rho g \quad / : \rho g$

$$V = \frac{F_{vz}}{\rho g}$$

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \ \{r\}$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad / \cdot 3$$

$$3V = 4\pi r^3 \quad / : 4\pi$$

$$\frac{3V}{4\pi} = r^3 \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

c) $Q = mc(t_1 - t_2) \quad / m(t_1 - t_2)$

$$c = \frac{Q}{m(t_1 - t_2)}$$

$$Q = mc(t_1 - t_2) \quad / : mc$$

$$\frac{Q}{mc} = t_1 - t_2 \quad / + t_2$$

$$t_2 + \frac{Q}{mc} = t_1 \quad / - \frac{Q}{mc}$$

$$t_2 = t_1 - \frac{Q}{mc}$$

Pedagogická poznámka: V bodu b) se objevují další dvě verze výsledku $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}}$ a $r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{4}V}{\pi}}$, které se dají odstraněním složeného zlomku převést na tvar $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Některé vzorce z matematiky:

- $o = a + b + c$,
- $o = 4a$,
- $o = 2a + 2b$.

Co mají všechny vzorce společného?

Levá strana:

- obvod *o*, tedy vzdálenost v metrech.

Pravá strana:

- *a*, *b*, *c* – délky stran, tedy vzdálenosti v metrech,
- $4a$ - čtyřnásobek délky strany, tedy vzdálenost v metrech,
- $2a$, $2b$ - dvojnásobky délek stran, tedy vzdálenosti v metrech.

Zdá se, že sčítat a porovnávat mezi sebou můžeme jen členy, které znamenají to samé (v předchozích příkladech vzdálenosti v metrech).

Jak je to u vzorců pro obsah?

- $S = a^2$,
- $S = ab$,
- $S = \frac{av_a}{2}$,
- $P = 2ab + 2ac + 2bc$.

Levá strana:

- Obsah *S*, povrch *P*, tedy plocha v m^2.

Pravá strana:

- a^2 – druhá mocnina délky strany, tedy plocha v m^2,
- ab - součin dvou délek, tedy plocha v m^2,
- $\frac{av_a}{2}$ - polovina součinu dvou délek , tedy plocha v m^2,
- $2ab, 2bc, 2ac$ - dvojnásobky součinů dvou délek, tedy plocha v m^2.

Opět sčítáme a porovnáváme mezi sebou jen členy, které znamenají to samé (v druhé várce plochu v m^2).

Sčítat, odčítat a porovnávat mezi sebou můžeme pouze členy, které mají stejný význam (stejnou jednotku).

Př. 3: Které z vyjádřených vztahů jsou určitě špatně? Proč?

a) $r = \frac{S}{2\pi}$ b) $a = \frac{P - 2b}{2(b + c)}$ c) $a = \frac{o}{b + c}$

a) $r = \frac{S}{2\pi}$ - špatný vzorec, na levé straně je délka (v metrech), na pravé straně je obsah (v m^2) (je tam pouze děleno číslem).

b) $a = \frac{P - 2b}{2(b + c)}$ - špatný vzorec, v čitateli zlomku na pravé straně se odečítá od obsahu (v m^2) délka (v metrech).

c) $a = \frac{o}{b + c}$ - špatný vzorec, na levé straně je délka (v metrech), na pravé dělíme obvod (v metrech), délkou (v metrech).

Př. 4: Vyjádři ze vzorců neznámou v závorce.

a) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ $\{C, C_2\}$ b) $S = 2ab + 2bc + 2ac$ $\{a, b\}$ c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$ $\{a, f\}$

a) $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \qquad / \cdot CC_1C_2$

$C_1C_2 = CC_2 + CC_1$

$C_1C_2 = C\left(C_2 + C_1\right) \qquad / : \left(C_2 + C_1\right)$

$C = \frac{C_1C_2}{C_2 + C_1}$

$C_1C_2 = CC_2 + CC_1 \qquad / - CC_1$

$C_1C_2 - CC_1 = CC_2$

$C_1\left(C_2 - C\right) = CC_2 \qquad / : \left(C_2 - C\right)$

$C_1 = \frac{CC_2}{C_2 - C}$

b) $S = 2ab + 2bc + 2ac \qquad / - 2bc$

$S - 2bc = 2ab + 2ac$

$S - bc = a\left(2b + 2c\right) \qquad / : \left(2b + 2c\right)$

$a = \frac{S - bc}{2b + 2c}$

$S = 2ab + 2bc + 2ac \qquad / - 2ab$

$S - 2ab = 2bc + 2ac$

$S - 2ab = c\left(2b + 2a\right) \qquad / : \left(2a + 2b\right)$

$c = \frac{S - ab}{2a + 2b}$

c) $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a'} \qquad / \cdot aa'f$

$aa' = a'f + af \qquad / - af$

$aa' - af = a'f$

$a\left(a' - f\right) = a'f \qquad / : \left(a' - f\right)$

$a = \frac{a'f}{a' - f}$

c) $\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a'} \qquad / \cdot aa'f$

$aa' = a'f + af$

$aa' = \left(a' + a\right) f \qquad / : \left(a' + a\right)$

$f = \frac{aa'}{a' + a}$

Pedagogická poznámka: Na bodu a) dokumentuji skutečnost, že pravidlo pro kontrolu vzorce pomocí jednotek (sčítání a porovnávání členů stejného typu) můžeme požít i u vzorce, jehož význam vůbec nechápeme. Jednotku kapacity *C* Farady $\left[1\,\mathrm{F}\right]$ žáci samozřejmě neznají (a já jim ji ani neříkám). Můžeme ale předpokládat, že nějakou jednotku veličina *C* má (říkejme ji třeba Čenda) a tak interpretovat i rovnice:

$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$ (všechny členy mají význam $\frac{1}{\text{Čenda}}$)

$C_1C_2 = CC_2 + CC_1$ (všechny členy mají význam Čenda^2)

$C = \frac{C_1C_2}{C_2 + C_1}$ (vlevo je Čenda, vpravo podíl $\frac{\text{Čenda}^2}{\text{Čenda}} = \text{Čenda}$).

Př. 5: Z kalorimetrické rovnice $c_1m_1\left(t_1 - t\right) = m_2c_2\left(t - t_2\right)$ vyjádři: a) c_2 b) t_2 c) t.

a) c_2

$c_1m_1\left(t_1 - t\right) = m_2c_2\left(t - t_2\right) \qquad / \, m_2\left(t - t_2\right)$

$\frac{c_1m_1\left(t_1 - t\right)}{m_2\left(t - t_2\right)} = c_2$

b) t_2

$c_1m_1\left(t_1 - t\right) = m_2c_2\left(t - t_2\right) \qquad / \, m_2c_2$

$\frac{c_1m_1\left(t_1 - t\right)}{m_2c_2} = t - t_2 \qquad / - t$

$$\frac{c_1 m_1 (t_1 - t)}{m_2 c_2} - t = -t_2 \qquad / \cdot (-1)$$

$$t_2 = t_1 - \frac{c_1 m_1 (t_1 - t)}{m_2 c_2}$$

c) t

$$c_1 m_1 t_1 - c_1 m_1 t = m_2 c_2 t - m_2 c_2 t_2 \qquad / + c_1 m_1 t$$

$$c_1 m_1 t_1 = m_2 c_2 t - m_2 c_2 t_2 + c_1 m_1 t \qquad / + m_2 c_2 t_2$$

$$c_1 m_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 = m_2 c_2 t + c_1 m_1 t$$

$$c_1 m_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 = (m_2 c_2 + c_1 m_1) t \qquad / : (m_2 c_2 + c_1 m_1)$$

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_2 c_2 + c_1 m_1}$$

Shrnutí: