3.2.15 Slovní úlohy o pohybu I

Předpoklady: 030214

Př. 1: Běžec na lyžích se pohybuje na celodenním výletu průměrnou rychlostí 13 km/h. Jakou vzdálenost ujede za 1 hodinu? Za 3 hodiny? Za 5 hodin? Za *t* hodin? Najdi vzorec, který umožňuje vypočítat dráhu, kterou ujede, z času, jak dlouho už běží.

1 hodina … 13 km
2 hodiny … $2 \cdot 13 = 26$ km
3 hodiny … $3 \cdot 13 = 39$ km
5 hodin … $5 \cdot 13 = 65$ km
t hodin … $t \cdot 13 = 13t$ km

Poslední výsledek je vlastně vzorec pro dráhu, kterou běžec urazí. Stačí do něj dosadit čas a získáme hledanou dráhu $s = 13t$.

Př. 2: Za jakého předpokladu platí pro dráhu pohybu vzorec $s = vt$? Odvoď ze vzorce vztahy pro rychlost a čas. Zkontroluj, zda dávají smysl.

Vzorec $s = vt$ platí za předpokladu, že se předmět pohybu pořád stejnou rychlostí.
Vzorec pro rychlost: $s = vt \quad / : t$

$v = \frac{s}{t}$, rozumný výsledek:

- velkou rychlostí se pohybujeme, když do čitatele zlomku dosadíme velké číslo (velká dráha), a do jmenovatele malé číslo (krátký čas) – například se za minutu dostaneme ze Země na Měsíc,
- malou rychlostí se pohybujeme, když do čitatele zlomku dosadíme malé číslo (krátká dráha), a do jmenovatele velké číslo (dlouhý čas) – například za rok přelezeme z jedné strany třídy na druhou.

Vzorec pro čas: $s = vt \quad / : v$

$t = \frac{s}{v}$, rozumný výsledek:

- dlouho se budeme pohybovat, když do čitatele zlomku dosadíme velké číslo (velká dráha), a do jmenovatele malé číslo (malá rychlost) – například, když budeme čekat, než se slimák doplazí z Třeboně do Prahy,
- krátký čas se budeme pohybovat, když do čitatele zlomku dosadíme malé číslo (malá dráha), a do jmenovatele velké číslo (velká rychlost) – například, když budeme čekat, než světlo přeletí z jedné strany třídy na druhou.

Př. 3: Při cestě po dálnici dosahuje Petr průměrné rychlosti 110 km/h. Za jak dlouho dojede z Lince do Splitu? Vzdálenost obou míst urči pomocí mapového serveru. Jakou průměrnou rychlost předpokládá vyhledávač spojení, který si použil?

Podle serveru www.mapy.cz, ze dne 24. 5. 2017: trasa 791 km, 7:56 hod.

Doba na ujetí cesty rychlostí 110 km/h

$s = vt \quad / : v$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{791}{110}\ \text{h} = 7{,}19\ \text{h} = 7\ \text{h}\ 11\,\text{min}$$

Průměrná rychlost předpokládaná vyhledávačem

$$7\ \text{h}\ 56\,\text{min} = 7 + \frac{56}{60}\ \text{h} = 7{,}93\ \text{h}$$

$s = vt \quad / : t$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{791}{7{,}93}\ \text{km/h} = 99{,}7\ \text{km/h}$$

Rychlostí 110 km/h bychom z Lince do Splitu dorazili za 7 hodin a 11 minut. Vyhledávač spojení na serveru www.mapy.cz předpokládá průměrnou rychlost 99,7 km/h.

Př. 4: Nejrychlejší čas při Vasově běhu na lyžích drží Švéd J. Brink od roku 2012, kdy 90 km dlouhou trasu uběhl za 3:38:41. Jakou průměrnou rychlostí se při závodu pohyboval?

$$3\ \text{h}\ 38\ \text{min}\ 41\,\text{s} = 3\ \text{h}\ 38 + \frac{41}{60}\ \text{min} = 3\ \text{h}\ 38{,}68\ \text{min} = 3 + \frac{38{,}68}{60}\ \text{h} = 3{,}64\ \text{h}$$

$s = vt \quad / : t$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90}{3{,}64}\ \text{km/h} = 24{,}7\ \text{km/h}$$

Švéd J. Brink běžel roku 2012 při Vasově běhu průměrnou rychlostí 24,7 km/h.

Př. 5: Převeď na jednotku v závorce.

a) $15\,\text{km/h}\,[\text{m/s}]$ b) $334\,\text{m/s}\,[\text{km/h}]$ c) $7{,}9\,\text{km/s}\,[\text{km/h}]$

a) $$15\,\text{km/h} = \frac{15\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{15\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = \frac{15\,000}{3\,600}\ \text{m/s} = 4{,}17\ \text{m/s}$$

b) $$334\,\text{m/s} = \frac{334\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \frac{334 \cdot \frac{1}{1000}\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} = \frac{334 \cdot 3600\ \text{km}}{1000\ \text{h}} = \frac{334 \cdot 3600}{1000}\ \text{km/h} = 1\,200\ \text{km/h}$$

c) $$7{,}9\,\text{km/s} = \frac{7{,}9\ \text{km}}{1\ \text{s}} = \frac{7{,}9\text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} = \frac{7{,}9 \cdot 3600\ \text{km}}{1\ \text{h}} = 7{,}9 \cdot 3600\ \text{km/h} = 28\,440\ \text{km/h}$$

Prostřední příklad si můžeme upravit takto:

$$334\ \text{m/s} = \frac{334\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \frac{334 \cdot \frac{1}{1000}\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} = 334 \cdot \frac{3600\ \text{km}}{1000\ \text{h}} = 334 \cdot 3{,}6\ \text{km/h} = 1\,200\ \text{km/h}$$

Vidíme, že při převádění z m/s na km/h musíme násobit číslem 3,6 $\Rightarrow$ při převodu z km/h na m/s budeme číslem 3,6 dělit.

Př. 6: Urči rychlost v km/h a m/s pokud,
a) šnek uleze za pět minut 35 cm,
b) chodec ujde 700 m za 6 minut,
c) auto ujede 5 km za 4 minuty,

a) šnek uleze za pět minut 35 cm

$t = 5\ \text{min} = 300\ \text{s}$, $s = 35\ \text{cm} = 0{,}35\ \text{m}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{0{,}35}{300}\ \text{m/s} = 0{,}00117\ \text{m/s} = 0{,}0042\ \text{km/h}$$

b) chodec ujde 700 m za 6 minut

$t = 6\ \text{min} = 360\ \text{s}$, $s = 700\ \text{m}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{700}{360}\ \text{m/s} = 1{,}94\ \text{m/s} = 7\ \text{km/h}$$

c) auto ujede 5 km za 4 minuty

$t = 4\ \text{min} = 240\ \text{s}$, $s = 5\ \text{km} = 5\,000\ \text{m}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{5\,000}{240}\ \text{m/s} = 20{,}8\ \text{m/s} = 75\ \text{km/h}$$

Př. 7: Martin ujde cestu na zahradu dlouhou 3,5 km většinou za 10 minut. Jak dlouho by touto rychlostí jel na třešně vzdálené 13 km?

Pro výpočet doby nutné pro jízdu na třešně potřebujeme znát rychlost pohybu, kterou můžeme určit z údajů o cestě na zahradu. Vzhledem k zadání je výhodnější počítat s rychlostí v km/h.

$t = 10\ \text{min} = \frac{10}{60}\ \text{h} = \frac{1}{6}\ \text{h}$, $s = 5\ \text{km}$

$s = vt \quad / : t$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{5}{\frac{1}{6}}\ \text{km/h} = 5 \cdot 6\ \text{km/h} = 30\ \text{km/h}$$

$v = 30\ \text{km/h}$, $s = 13\ \text{km}$

$s = vt \quad / : v$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{13}{30}\ \text{h} = 0{,}43\ \text{h} = 26\ \text{min}$$

Martin dorazí na třesně za 26 minut.

Př. 8: Veličiny, které popisují pohyb Adama, označuj indexem *A*, veličiny, které popisují pohyb Evy, indexem *E*. Zachyť pomocí rovnic vztahy popsané v zadání.
a) Adam jede rychlostí o 7 km/h vyšší než Eva.

b) Adam ušel o třetinu menší vzdálenost než Eva.
c) Adam se vydal na cestu o půl hodiny později než Eva, musel jít proto o 1,5 km/h vyšší rychlostí, aby ji přesně v cíli dohonil.
d) Vesnice, kde bydlí Adam, je vzdálena od Evina bydliště 6 km. Často si dávají schůzku tak, že oba vyrazí z domova a sejdou se někde po cestě. Dneska vyrazili ve stejný čas, ale Adam jel na kole a tak se pohyboval čtyřikrát větší rychlostí.

a) Adam jede rychlostí o 7 km/h vyšší než Eva.
$v_A = v_E + 7$

b) Adam ušel o třetinu menší vzdálenost než Eva.
$s_A = \frac{2}{3} s_E$

c) Adam se vydal na cestu o půl hodiny později než Eva, musel jít proto o 1,5 km/h vyšší rychlostí, aby ji přesně v cíli dohonil.
$t_A = t_E - 0{,}5$, $v_A = v_E + 1{,}5$, $s_A = s_E$ (sešli se v cíli $\Rightarrow$ urazili stejnou vzdálenost)

d) Vesnice, kde bydlí Adam, je vzdálena od Evina bydliště 6 km. Často si dávají schůzku tak, že oba vyrazí z domova a sejdou se někde po cestě. Dneska vyrazili ve stejný čas, ale Adam jel na kole a tak se pohyboval čtyřikrát větší rychlostí.
$t_A = t_E$, $v_A = 4v_E$, $s_A + s_E = 6$

Pedagogická poznámka: Nejčastěji se zapomíná na třetí (dráhovou) rovnici v bodě c). Při kontrole se píšeme rovnice na tabuli a na tomto místě čekáme, dokud ji někdo nevymyslí.

Př. 9: Adam a Eva bydlí 9 km od sebe. Občas si dávají romantické schůzky téměř na půl cesty. Oba vyjedou na kole ve stejný okamžik - Adam rychlostí 15 km/h, Eva rychlostí 12 km/h. Za jak dlouho a kde se potkají? Hledej řešení pomocí rovnice.

Řešení bez rovnice: Adam jede rychlostí 15 km/h, Eva rychlostí 12 km/h $\Rightarrow$ přibližují se rychlostí $15 + 12\ \text{km/h} = 27\ \text{km/h}$.
$v = 27\ \text{km/h}$, $s = 9\ \text{km}$
$s = vt \quad / : v$
$t = \frac{s}{v} = \frac{9}{27}\ \text{h} = \frac{1}{3}\ \text{h} = 20\ \text{min}$
$s_A = v_A t_A = 15 \cdot \frac{1}{3}\ \text{km} = 5\ \text{km}$
Potkají se po 20 minutách ve vzdálenosti 5 km od místa, kde bydlí Adam.

Zkusíme řešení pomocí rovnice (rovnice umožňují řešit i daleko obtížnější příklady než je tento).
Adam a Eva musí dohromady urazit 9 km: $s_A + s_B = 9$ (nejdůležitější rovnice, zachycuje základní vlastnost situace).
Obě dráhy můžeme vyjádřit pomocí času a rychlosti: $v_A t_A + v_E t_E = 9$.

Oba vyrazili najednou $\Rightarrow$ oba časy jsou stejné, $t_A = t_B = t$: $v_A t + v_E t = 9$.
Dosadíme hodnoty rychlostí: $15t + 12t = 9$.
$27t = 9 \quad / : 27$
$t = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$
Dál už je řešení stejné.

Př. 10: Kája vyrazil s kamarády na kole na chatu. Kousek před cílem, poté co ujeli 13 km si vzpomněl, že doma zapomněl klíče. Zavolal domů sestře Anežce a přesvědčil ji aby mu klíče dovezla, že ji vyjede naproti. Kája vysvětlil kamarádům, aby na něj počkali a vyrazil hned zpátky domů rychlostí 24 km/h. Anežka se ještě musela sbalit a vyndat kolo, takže vyrazila o pět minut později rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho se setkali? Kde?

Příklad nejde spočítat stejně jako předchozí, můžeme sice zjistit rychlost přibližování, ale Anežka vyráží na cestu později, takže dohromady od chvíle, kdy vyrazí Anežka, oba neurazí 13 km (ale méně o to, co urazil Kája než sestra vyrazila na cestu).
Zkusíme sestavit postupně rovnici.
Celkově oba urazí 13 km: $s_K + s_A = 13$.
Obě dráhy můžeme vyjádřit pomocí času a rychlosti: $v_K t_K + v_A t_A = 13$.
Anežka vyrazila o 5 minut později $\Rightarrow$ její čas jízdy je o 5 minut kratší, $t_A = t_K - \frac{5}{60} = t_K - \frac{1}{12}$.
Dosadíme za t_A: $v_K t_K + v_A \left(t_K - \frac{1}{12} \right) = 13$.
Dosadíme hodnoty rychlostí: $24t_K + 20\left(t_K - \frac{1}{12} \right) = 13$.
$24t_K + 20t_K - \frac{5}{3} = 13$
$44t_K - \frac{5}{3} = 13 \quad / \cdot 3$
$132t_K - 5 = 39 \quad / + 5$
$132t_K = 44 \quad / : 132$
$t_K = \frac{44}{132}\,\text{h} = \frac{11}{33}\,\text{h} = \frac{1}{3}\,\text{h} = 20\,\text{min}$
$t_A = 20 - 5\,\text{min} = 15\,\text{min} = \frac{1}{4}\,\text{h}$
Uražené vzdálenosti:
$s_K = v_k t_K = 24 \cdot \frac{1}{3}\,\text{km} = 8\,\text{km}$
$s_A = v_A t_A = 20 \cdot \frac{1}{4}\,\text{km} = 5\,\text{km}$
Kontrola: $s_A + s_K = 5 + 8\,\text{km} = 13\,\text{km}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad samozřejmě pomocí rovnice naprostá většina žáků nevyřeší, řešíme tedy postupně na tabuli.

Dodatek: Předchozí příklad je možné vyřešit i bez rovnice.

Za 5 minut, po které jede Kája sám, ujede: $s_K = v_K t_K = 24 \cdot \frac{5}{60}\ \text{km} = 2\ \text{km}$.

Ve chvíli, kdy Anežka nasedá na kolo, jsou od sebe sourozenci vzdálení $13 - 2\ \text{km} = 11\ \text{km}$ a přibližují se k sobě rychlostí:

$v = v_K + v_A = 24 + 20\ \text{km} = 44\ \text{km}$.

Sourozenci se potkají za: $t = \frac{s}{v} = \frac{11}{44}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h}$ (stejný výsledek, protože jde o dobu, po kterou jela na kole Anežka).

Shrnutí: Dráhu rovnoměrného pohybu spočteme podle vzorce $s = vt$.