

3.2.16 Slovní úlohy o pohybu II

Předpoklady: 030215

Př. 1: Ve známé řecké aporii má Achilles dohonit želvu. Achilles je 10 krát rychlejší než želva a proto dá želvě 90 m náskok. Kdy a kde Achilles želvu dohoní, jestliže běží rychlostí 9 m/s?

Ve chvíli, kdy Achilles želvu dohoní, uběhne o 90 m více, než uleze želva.

$$s_A = s_Z + 90$$

$$v_A t_A = v_Z t_Z + 90 \quad (\text{oba se pohybují stejně dlouho} \Rightarrow t_A = t_Z = t)$$

$$v_A t = v_Z t + 90 \quad (v_A = 9 \text{ m/s}, v_Z = 0,9 \text{ m/s} - \text{běží desetkrát pomaleji})$$

$$9t = 0,9t + 90 \quad / \cdot 10$$

$$90t = 9t + 900 \quad / -9t$$

$$81t = 900$$

$$t = \frac{900}{81} = \frac{100}{9} \doteq 11,1 \text{ s}$$

$$\text{Dráha uběhlá Achillem: } s_A = v_A t_A = 9 \cdot \frac{100}{9} = 100 \text{ m}$$

$$\text{Dráha ulezlá želvou: } s_Z = v_Z t_Z = 0,9 \cdot \frac{100}{9} = 10 \text{ m}$$

Achilles dožene želvu přesně po 100 m.

Př. 2: Jardovi ujel autobus. Poslední zastávka, na které je možné do autobusu ještě přistoupit je 19 km od Jardova bydliště. Kdy a kde Jarda autobus dohoní, jestliže ho začne stíhat 6 minut po jeho odjezdu autem rychlostí 80 km/h a autobus jede podle jízdního řádu průměrnou rychlostí 55 km/h?

Ve chvíli, kdy autobus dohoní, urazí autobus i Jarda v autě stejnou vzdálenost.

$$s_J = s_A$$

$$v_J t_J = v_A t_A \quad (\text{dosadíme rychlosti } v_J = 80 \text{ km/h}, v_A = 55 \text{ km/h})$$

$$80t_J = 55t_A \quad (\text{Jarda vyrazil o 6 minut později: } t_J = t_A - \frac{6}{60} = t_A - 0,1)$$

$$80(t_A - 0,1) = 55t_A$$

$$80t_A - 8 = 55t_A \quad / -55t_A + 8$$

$$25t_A = 8 \quad / : 25$$

$$t_A = \frac{8}{25} = 0,32 \text{ h} = 19,2 \text{ min}$$

$$\text{Vzdálenost uražená Jardou: } s_J = 80(t_A - 0,1) = 80(0,32 - 0,1) \text{ km} = 80 \cdot 0,22 \text{ km} = 17,6 \text{ km}.$$

Vzdálenost uražená autobusem

$$s_A = 55 \cdot t_A = 55 \cdot 0,32 \text{ km} = 17,6 \text{ km}$$

Př. 3: Martin si pro auto do servisu dojel na kole rychlostí 20 km/h. Zpátky autem se vracel rychlostí o 40 km/h větší a byl doma o 16 minut rychleji. Jak daleko je autoservis od Martinova bydliště?

Dráha, kterou ujel Martin na kole je stejná jako dráha, kterou ujel autem.

$$s_K = s_A$$

$$v_K t_K = v_A t_A \quad v_K = 20 \text{ km/h}, v_A = 60 \text{ km/h} - \text{ autem jel o 40 km/h rychleji}$$

$$20 t_K = 60 t_A \quad t_A = t_K - \frac{16}{60} = t_K - \frac{4}{15} - \text{ autem se vrátil o 16 minut rychleji}$$

$$20 t_K = 60 \left(t_K - \frac{4}{15} \right)$$

$$20 t_K = 60 t_K - 60 \cdot \frac{4}{15}$$

$$20 t_K = 60 t_K - 16 \quad / -20 t_K + 16$$

$$16 = 40 t_K \quad / : 40$$

$$t_K = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} \text{ h} = 24 \text{ min}$$

$$\text{Dráha ujetá autem: } s_A = v_A \cdot \left(t_K - \frac{4}{15} \right) = 60 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{15} \right) \text{ km} = 60 \cdot \left(\frac{6-4}{15} \right) \text{ km} = 60 \cdot \frac{2}{15} \text{ km} = 8 \text{ km}$$

$$\text{Dráha ujetá na kole: } s_K = v_K \cdot t_K = 20 \cdot \frac{2}{5} \text{ km} = 8 \text{ km}$$

Př. 4: Radek musí od vlaku chodit domů 4 km. Protože se dnes vrací z delší pracovní cesty, vyšla mu Žaneta s dětmi naproti, ale kvůli problémům s obouváním u nejmladšího Petříčka se zpozdili a na cestu se vydali teprve patnáct minut před příjezdem vlaku do stanice. Kdy a kde se setkají, jestliže Radek spěchá od vlaku rychlostí 6 km/h, zatímco Žaneta s malými dětmi se pohybuje pouze rychlostí 4 km/h?

Ve chvíli, kdy se potkají, urazí dohromady trasu 4 km

$$4 = s_Z + s_R$$

$$4 = v_Z t_Z + v_R t_R$$

$$4 = 4 \cdot t_Z + 6 \cdot t_R \quad t_R = t_Z - \frac{15}{60} = t_Z - \frac{1}{4}$$

$$4 = 4 \cdot t_Z + 6 \cdot \left(t_Z - \frac{1}{4} \right)$$

$$4 = 10 \cdot t_Z - \frac{3}{2} \quad / \cdot 2$$

$$8 = 20 \cdot t_Z - 3 \quad / +3$$

$$11 = 20 \cdot t_Z$$

$$t_Z = \frac{11}{20} \text{ h} = 33 \text{ min}$$

$$t_R = 33 - 15 \text{ min} = 18 \text{ min} = \frac{18}{60} \text{ h} = 0,3 \text{ h}$$

Ušlá vzdálenost před setkáním:

- Žaneta: $s_Z = v_Z t_Z = 4 \cdot \frac{11}{20} \text{ km} = 2,2 \text{ km}$,
- Radek: $s_R = v_R t_R = 6 \cdot 0,3 \text{ km} = 1,8 \text{ km}$.

Žaneta šla s dětmi 33 minut, za které ušla 2,2 km.

Př. 5: Jirka v běhu děsně školí Honzu. Zatímco Honza uběhl 100 m za 16,5 sekundy, Jirkovi stačilo jen 12,5 sekundy. Jirka navrhl, že si dají závody na 60 m a aby měl Honza šanci, nechá mu 10 m náskok (Honza tak poběží jen 50 m). Kdy a kde Jirka Honzu dohoní, pokud oba vyběhnou nastejno a poběží stejnou rychlostí jako při závodě na 100 m?

Z výsledků závodů na 100 m můžeme vypočítat rychlosti obou hochů:

- Honza: $v_H = \frac{s}{t} = \frac{100}{16,5} \text{ m/s} = 6,1 \text{ m/s}$,
- Jirka: $v_J = \frac{s}{t} = \frac{100}{12,5} \text{ m/s} = 8 \text{ m/s}$.

Snažíme se popsat závod na 60 m vymyšlený Jirkou.

Honza má 10 m náskok \Rightarrow v okamžiku, kdy Jirka Honzu dohoní, urazí o 10 m více:

$$s_H + 10 = s_J$$

$$\text{Dosadíme: } v_H t_H + 10 = v_J t_J.$$

$$\text{Oba vyrážejí ve stejný okamžik } \Rightarrow t_H = t_J = t : v_H t + 10 = v_J t.$$

$$\text{Dosadíme rychlosti obou kluků: } 6,1t + 10 = 8t \quad / -6,1t$$

$$10 = 1,9t \quad / :1,9$$

$$t = 5,3 \text{ s}$$

Uběhlá vzdálenost před setkáním:

- Honza: $s_H = v_H t_H = 6,1 \cdot 5,3 \text{ m} = 32,3 \text{ m}$,
- Jirka: $s_J = v_J t_J = 8 \cdot 5,3 \text{ m} = 42,4 \text{ m}$.

Jirkova vzdálenost není přesně o 10 m (způsobeno zaokrouhlováním v průběhu výpočtu).

Jirka Honzu předběhne na 42 m své dráhy (tedy 18 m před cílem).

Př. 6: Na jednokolejně trati mezi Dolní Lhotou a Nebesovem dlouhé 15 km se má vybudovat malá stanice, kde se budou vyhýbat protijedoucí vlaky. Kde je třeba stanici postavit, aby vlaky vyjíždějící současně z obou koncových stanic čekaly co nejméně, pokud vlak jede ze Lhoty do Nebesova do kopce rychlostí 35 km/h zatímco vlak v protisměru je o 15 km/h rychlejší?

Nejvýhodnější je postavit stanici tam, kde by se vlaky srazily, kdyby vyjeli proti sobě.

$$\text{Vlaky se potkají ve chvíli, kdy společně urazí 15 km: } s_1 + s_2 = 15.$$

$$\text{Dosadíme: } v_1 t_1 + v_2 t_2 = 15.$$

$$\text{Oba vlaky vyjíždějí současně } \Rightarrow \text{jedou stejně dlouho: } t_1 = t_2 = t : v_1 t + v_2 t = 15.$$

$$\text{Dosadíme hodnoty rychlostí: } 35t + 50t = 15.$$

$$85t = 15 \quad / :85$$

$$t = \frac{15}{85} \text{ h} = \frac{3}{17} \text{ h} = 0,059 \text{ h}$$

Vzdálenosti uražené vlaky:

- ze Lhoty do Nebesova (do kopce): $s_1 = v_1 t_1 = 35 \cdot \frac{3}{17} \text{ km} = 6,2 \text{ km}$,
- z Nebesova do Lhoty (z kopce): $s_2 = v_2 t_2 = 50 \cdot \frac{3}{17} \text{ km} = 8,8 \text{ km}$,

(součet obou drah: $6,2 + 8,8 \text{ km} = 15 \text{ km}$ - OK).

Vyhýbací stanici je třeba vybudovat ve vzdálenosti 6,2 km od Lhoty (8,8 km od Nebesova).

Př. 7: Vrať se k příkladu 5. Urči jaký náskok by musel Jirka Honzovi dát, aby Honza mohl vyhrát.

Spočteme, jak dlouho Jirka poběží 60 m a jakou vzdálenost by tuto dobu uběhl Honza. Zbytek do 60 m pak musí představovat jeho náskok.

Doba, po kterou Jirka poběží: $t = \frac{s}{v} = \frac{60}{8} \text{ s} = 7,5 \text{ s}$.

Vzdálenost, kterou za tuto dobu uběhne Honza: $s = vt = 6,1 \cdot 7,5 \text{ m} = 45,75 \text{ m}$.

Jirka musí dát Honzovi náskok $60 - 45,75 \text{ m} = 14,25 \text{ m}$.

Shrnutí: Při řešení úloh o pohybu je třeba vyjít z rovnice, která popisuje zvláštnost celého pohybu a pak do ní dosazovat.