

### 3.2.19 Intervaly I

**Předpoklady:** 030218

**Př. 1:** Zapiš výčtem a znázorni na číselné ose množiny.

a)  $A = \{x \in \mathbb{N}; 2054 \leq x < 2058\}$       b)  $B = \{x \in \mathbb{Z}; -1 < |x| \leq 1\}$

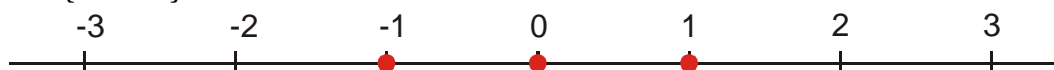
a)  $A = \{x \in \mathbb{N}; 2054 \leq x < 2058\}$

$A = \{2054; 2055; 2056; 2057\}$



b)  $B = \{x \in \mathbb{Z}; -1 < |x| \leq 1\}$

$B = \{-1; 0; 1\}$



**Pedagogická poznámka:** Problém s bodem b) spočívá v tom, že žáci neporovnávají  $|x|$ , ale pouze  $x$ . Proto do množiny nezahrnují číslo -1. Je to krásně vidět, když se jich zeptáte, proč do množiny nepatří číslo -1 ("Není větší než -1"). Ptám se: "Ona je v zadání nějaká podmínka pro číslo  $x$ ?"  
Zajímavé je, kolik z nich tuto chybu zopakuje v příkladu 3 a to i v případě, že si u chyby dělali poznámku.

**Př. 2:** Během první minuty zahřívání vody se teplota zvýšila z  $10,5^\circ\text{C}$  na  $15,3^\circ\text{C}$ . Zapiš všechny hodnoty teploty, kterých voda během první minuty dosáhla.

Úkol je zjevně nesplnitelný: museli bychom zapsat čísla 10,5 a 15,3 a všechna čísla mezi nimi (teplota vody se mění postupně), kterých je nekonečně mnoho (10,51; 10,501; 10,5001; 10,50001 ...).

Úkol podobný předchozímu příkladu (zapsat všechna čísla větší nebo rovná jednomu číslu a menší nebo rovná druhému číslu – lidově od někud někam) se v matematice řeší často  $\Rightarrow$  existuje způsob jak tuto množinu (**uzavřený interval**) zapsat.

Co musí takový zápis obsahovat?

Obě hraniční čísla a naznačení, že k nim patří i všechna reálná čísla mezi nimi:

Zápis:  $\langle 10,5; 15,3 \rangle$  :

- $\langle \rangle$  - všechna reálná čísla,
- 10,5 – větší nebo rovna 10,5,
- 15,3 – menší nebo rovna 15,3

**Uzavřený interval**  $\langle a; b \rangle$

Množinu  $A = \langle a; b \rangle$  všech reálných čísel větších nebo rovných číslu  $a$  a zároveň menších nebo rovných číslu  $b$  označujeme jako uzavřených interval  $A = \langle a; b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ .

**Pedagogická poznámka:** Někteří žáci se už v tomto okamžiku ptají, jak by to bylo, kdyby krajní body do množiny nepatřily. Chválím je za postřeh, ale v tuto chvíli to neřešíme (už vůbec ne před třídou).

**Př. 3:** Zapiš výčtem a znázorni na číselné ose množiny.

a)  $A = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 3\}$     b)  $B = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq |x| \leq 1\}$     c)  $C = \{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 2\}$

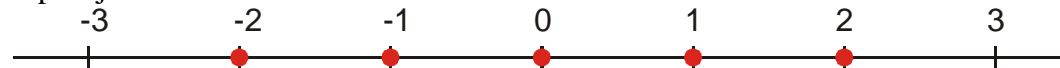
a)  $A = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 3\} = \langle 0; 3 \rangle$



b)  $B = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq |x| \leq 1\} = \langle -1; 1 \rangle$



c)  $C = \{x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 2\} = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$  - uvažujeme pouze celá čísla  $\Rightarrow$  nemůžeme výsledek zapsat jako interval.



**Př. 4:** Zapiš výčtem i vlastností pomocí nerovností množiny zakreslené na číselné ose.

a)



b)



a)  $A = \langle 2; 3 \rangle = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 3\}$

b)  $A = \langle -2; 8 \rangle = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 8\}$

**Pedagogická poznámka:** Ve zbytku hodiny se rychlejší část třídy zabývá průniky a sjednoceními. Termíny ale nepoužíváme, pracujeme spíše intuitivně.

**Př. 5:** Jdeš do obchodu. Táta Ti připomíná: „Kup máslo a houbičky na nádobí“. Rozhodni, zda bude táta s nákupem spokojený, jestliže přineseš:

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| a) máslo, ale bez houbiček, | b) houbičky i máslo,                      |
| c) houbičky bez másla,      | d) spoustu věcí ale bez másla i houbiček. |

Táta bude spokojený pouze v případě popsaném v bodu b), protože chtěl přinést obě věci: máslo i houbičky na nádobí.

**Př. 6:** Rodiče odchází navečer do divadla. U dveří mamka připomíná: „Nezapomeň umýt nádobí nebo vyluxovat.“ V jakém případě bude mamka po návratu spokojená? Za jakých okolností bude naopak našťvaná?

Našťvaná bude, pokud po návratu nebude umyté nádobí a nebude vyluxováno (neudělám ani jednu z věcí).

Spokojená bude pokud bude:

- umyté nádobí a nevyluxovaný pokoj,
- neumyté nádobí a vyluxovaný pokoj,
- umyté nádobí a vyluxovaný pokoj.

Stačí, když udělám jednu věc, abych splnil zadaný úkol.

**Pedagogická poznámka:** U obou následujících příkladů používám v případě obtíží jako poslední záchranu následující model: Máš za úkol napsat na papírek číslo, které je větší než 3 a menší než 5, a zároveň je větší než 2 a menší než sedm. Bude v pořádku, když na papír napíšeš číslo 3? 4? 6? ...

**Př. 7:** Pro číslo  $x$  platí  $x \in \langle 3; 5 \rangle$  a zároveň  $x \in \langle 2; 7 \rangle$ . Napiš množinu všech čísel, která mohou být číslem  $x$ .

$x \in \langle 3; 5 \rangle$  a zároveň  $x \in \langle 2; 7 \rangle \Rightarrow$  musí vyhovovat oběma podmínkám. Rozebereme si je postupně.

Dolní hranice (čísla, kterým se  $x$  rovná, nebo, která jsou menší):

- $x \in \langle 3; 5 \rangle \Rightarrow x \geq 3$ ,
- $x \in \langle 2; 7 \rangle \Rightarrow x \geq 2$ ,

$\Rightarrow$  pokud má platit obojí, musí platit  $x \geq 3$  (pak je automaticky větší i než 2).

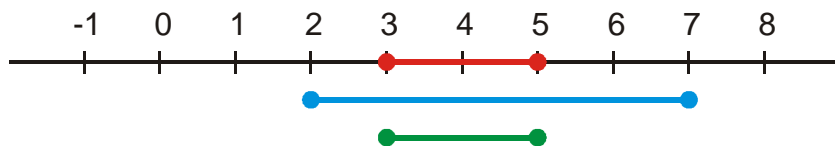
Horní hranice (čísla, kterým se  $x$  rovná, nebo, která jsou větší):

- $x \in \langle 3; 5 \rangle \Rightarrow x \leq 5$ ,
- $x \in \langle 2; 7 \rangle \Rightarrow x \leq 7$ ,

$\Rightarrow$  pokud má platit obojí, musí platit  $x \leq 5$  (pak je automaticky menší i než 7).

Pro hledaná  $x$  platí:  $x \geq 3$  a  $x \leq 5 \Rightarrow x \in \langle 3; 5 \rangle = A$

Příklad můžeme snadno vyřešit obrázkem. Nakreslíme si oba intervaly a hledáme čísla, která patří do obou.



Číslem  $x$  může být libovolné číslo z intervalu  $\langle 3; 5 \rangle$ .

**Př. 8:** Pro číslo  $y$  platí  $y \in \langle 3; 8 \rangle$  nebo  $y \in \langle -1; 6 \rangle$ . Napiš množinu všech čísel, která mohou být číslem  $y$ .

$y \in \langle 3; 8 \rangle$  nebo  $y \in \langle -1; 6 \rangle \Rightarrow$  musí vyhovovat alespoň jedné podmínce. Rozebereme si je postupně.

Dolní hranice (čísla, kterým se  $y$  rovná, nebo, která jsou menší):

- $y \in \langle 3; 8 \rangle \Rightarrow y \geq 3$ ,
- $y \in \langle -1; 6 \rangle \Rightarrow y \geq -1$ ,

$\Rightarrow$  pokud stačí, kdy platí jedna z podmínek, stačí podmínka  $y \geq -1$  (na druhé nezáleží, stačí, když je splněna jedna z nich).

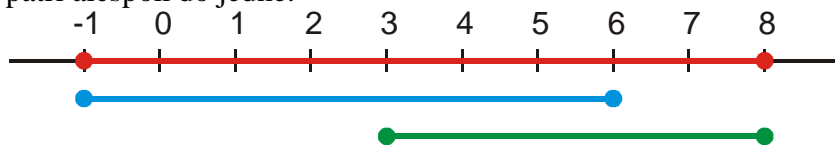
Horní hranice (čísla, kterým se  $y$  rovná, nebo, která jsou větší):

- $y \in \langle 3; 8 \rangle \Rightarrow y \leq 8$ ,
- $y \in \langle -1; 6 \rangle \Rightarrow y \leq 6$ ,

$\Rightarrow$  pokud stačí, když platí jedna z podmínek stačí podmínka  $y \leq 8$  (na druhé nezáleží, stačí, když je splněna jedna z nich).

Pro hledaná  $y$  platí:  $y \geq -1$  a  $y \leq 8 \Rightarrow y \in \langle -1; 8 \rangle$

Příklad můžeme snadno vyřešit obrázkem. Nakreslíme si oba intervaly a hledáme čísla, která patří alespoň do jedné.



Číslem  $x$  může být libovolné číslo z intervalu  $\langle -1; 8 \rangle$ .

**Shrnutí:** Všechna reálná čísla větší nebo rovna číslu  $a$  a zároveň menší nebo rovna číslu  $b$  můžeme zapsat uzavřeným intervalem  $\langle a; b \rangle$ .