3.2.20 Intervaly II

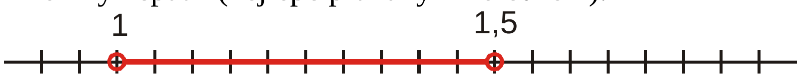
Předpoklady: 030219

Pedagogická poznámka: Soubor se zadáním příkladů je schválně udělaný tak, aby bylo vidět zadání druhého příkladu se zápisem otevřených intervalů. Bystřejší žáci si toho všimnou a způsob zápisu otevřeného intervalu si odvodí sami.

Př. 1: Jana potřebuje určit hmotnost kamene, ale nemá k dispozici váhu. Vzpomněla si však na fyziku a pomocí rovnoramenné páky zjistila, že kámen je těžší než 1 litr vody a lehčí než 1,5 litru vody. Znázorni všechny možné hmotnosti kamene na číselné ose. Zapiš všechny možné hmotnosti kamene.

Kámen může mít všechny hmotnosti větší než 1 kg a menší než 1,5 kg. Je to podobné jako u intervalů v minulé hodině, ale krajní body nepatří mezi čísla, které vyhovují $\Rightarrow$ potřebujeme zápis nového typu intervalu.
Zápis bude zřejmě podobný zápisu uzavřeného intervalu, ale s jiným typem závorek.

Vyznačení na ose bude stejné s tím, že budeme muset nějak vyznačit, že čísla 1 a 1,5 do množiny nepatří (nejlépe prázdným kolečkem).



Množinu čísel, pro která platí $1 < x < 1{,}5$ (jsou větší než 1 a menší než 1,5) nazývá **otevřený interval**, otevřený interval zapisujeme pomocí kulatých závorek $(1;1{,}5)$.

Př. 2: Jaký je rozdíl mezi intervaly $\langle -2;6\rangle$ a $(-2;6)$?

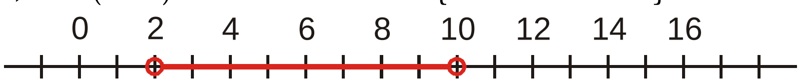
Intervaly $\langle -2;6\rangle$ krajní čísla -2 a 6, která interval $(-2;6)$ neobsahuje. Jinak obsahují stejná čísla.

Interval $\langle -2;6\rangle$ obsahuje krajní body, které ho uzavírají $\Rightarrow$ jde o uzavřený interval.
Interval $(-2;6)$ neobsahuje krajní body, které by ho uzavíraly $\Rightarrow$ jde o otevřený interval.

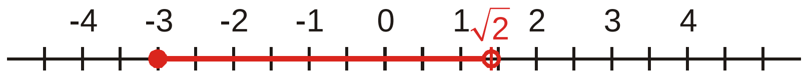
Př. 3: Zapiš vlastností pomocí nerovností a zakresli na číselnou osu množiny.

a) $A = (2;10)$ b) $B = \left\langle -3;\sqrt{2}\right)$ c) $C = \left(-\sqrt{2};\infty\right)$ d) $D = \left(-\infty;\frac{2}{5}\right\rangle$

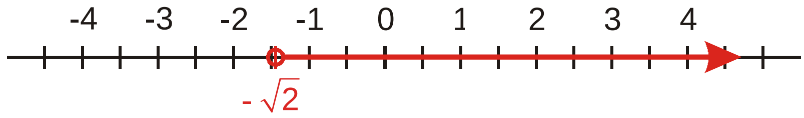
a) $A = (2;10)$ $A = \{x \in R; 2 < x < 10\}$



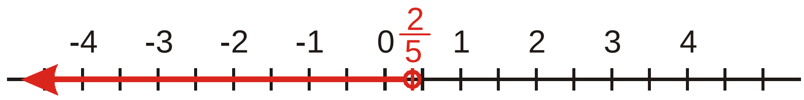
b) $B = \left\langle -3;\sqrt{2}\right)$ $B = \left\{x \in R; -3 \le x < \sqrt{2}\right\}$



c) $C = \left(-\sqrt{2};\infty\right)$ $\qquad C = \left\{x \in R; -\sqrt{2} < x\right\}$



d) $D = \left(-\infty;\frac{2}{5}\right\rangle$ $\qquad D = \left\{x \in R; x \leq \frac{2}{5}\right\}$



Př. 4: Které z intervalů z předchozího příkladu se označují jako neomezené intervaly?

Jde o intervaly

- $C = \left(-\sqrt{2};\infty\right)$, obsahuje všechna čím dál větší čísla, jde ke kladnému nekonečnu,
- $D = \left(-\infty;\frac{2}{5}\right\rangle$, obsahuje všechna čím dál menší čísla, jde k zápornému nekonečnu.

Př. 5: V každé z následujících množin najdi nejmenší a největší číslo.
a) $\langle -2;8\rangle$ b) $\langle -5;\infty)$ c) $\langle 4;12)$

a) $\langle -2;8\rangle$
Nejmenším číslem je -2, největším číslem je 8.

b) $\langle -5;\infty)$
Nejmenším číslem je -5, množina nemá největší číslo (protože ke každému číslu můžeme najít číslo o jedna větší).

c) $\langle 4;12)$
Nejmenším číslem je 4, množina nemá největší číslo (číslo 12 do množiny nepatří, největší menší číslo není, protože k číslu 11,999999 můžeme pořád připisovat další devítky).

Př. 6: Napiš libovolný:
a) zleva neomezený interval, b) polouzavřený interval.

a) zleva neomezený interval
$(-\infty;123\rangle$ - každý interval, který má vlevo mínus nekonečno.

b) polouzavřený interval
$\langle \pi;13)$ - každý interval, která neobsahuje jeden z krajních bodů.

Př. 7: Vyznač na číselné ose všechna čísla, která patří do množiny $\langle 5;1\rangle$.

Není co vyznačovat na ose. Neexistují žádná čísla, kterou jsou zároveň větší nebo rovna 5 a menší nebo rovna 1.

Př. 8: Rozhodni, zda jsou následující výroky pravdivé. Výsledek zdůvodni.

a) $\frac{5}{2} \in (1;2)$ b) $\sqrt{12} \in \langle 3;4\rangle$ c) $0,02^2 \in (0;0,001)$

a) $\frac{5}{2} \in (1;2)$. Nepravda: $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} = 2,5 > 2$.

b) $\sqrt{12} \in \langle 3;4\rangle$. Pravda: $3 < \sqrt{12} < 4$, protože $3^2 = 9 < 12 < 16 = 4^2$.

c) $0,02^2 \in (0;0,001)$. Pravda: $0,02^2 = 0,0004$, $0 < 0,0004 < 0,001$.

Př. 9: Pro číslo *x* platí $x \in (-2;4\rangle$ a zároveň $x \in (1;6\rangle$. Napiš množinu všech čísel, která mohou být číslem *x*.

$x \in (-2;4\rangle$ a zároveň $x \in (1;6\rangle$ $\Rightarrow$ musí vyhovovat oběma podmínkám. Rozebereme si je postupně.

Dolní hranice (čísla, kterým se *x* rovná, nebo, která jsou menší):

- $x \in (-2;4\rangle \Rightarrow x > -2$,
- $x \in (1;6\rangle \Rightarrow x > 1$,

$\Rightarrow$ pokud má platit obojí, musí platit $x > 1$ (pak je automaticky větší i než -2).

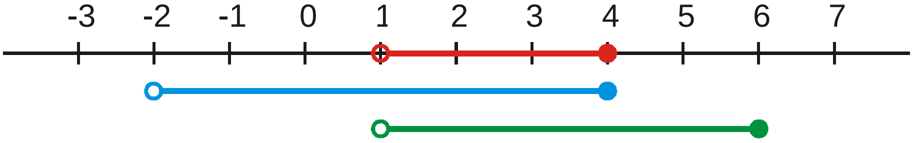
Horní hranice (čísla, kterým se *x* rovná, nebo, která jsou větší):

- $x \in (-2;4\rangle \Rightarrow x \leq 4$,
- $x \in (1;6\rangle \Rightarrow x \leq 6$,

$\Rightarrow$ pokud má platit obojí, musí platit $x \leq 4$ (pak je automaticky menší i než 6).

Pro hledaná *x* platí: $x > 1$ a $x \leq 4$ $\Rightarrow$ $x \in (1;4\rangle$.

Příklad můžeme snadno vyřešit obrázkem. Nakreslíme si oba intervaly a hledáme čísla, která patří do obou.



Číslem *x* může být libovolné číslo z intervalu $x \in (1;4\rangle$.

Př. 10: Pro číslo *y* platí $y \in (-\infty; 3\rangle$ nebo $y \in (-1; 6)$. Napiš množinu všech čísel, která mohou být číslem *y*.

$y \in (-\infty; 3\rangle$ nebo $y \in (-1; 6)$ $\Rightarrow$ stačí, když číslo patří do jednoho z intervalů a vyhovuje podmínce. Rozebereme si je postupně.
Dolní hranice (čísla, kterým se *y* rovná, nebo, která jsou menší):

- $y \in (-\infty; 3\rangle$ $\Rightarrow$ *y* může být libovolně malé číslo,
- $y \in (-1; 6)$ $\Rightarrow$ $x > -1$,

$\Rightarrow$ pokud stačí splnit jednu z podmínek, může být *y* libovolně malé číslo (splňuje tak první podmínku a na druhé nezáleží).

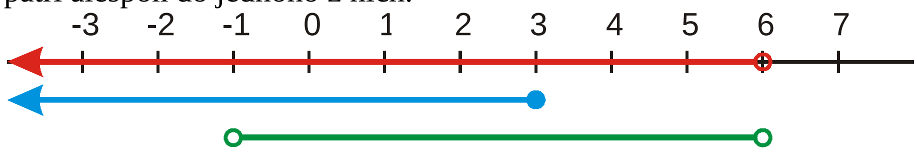
Horní hranice (čísla, kterým se y rovná, nebo, která jsou větší):

- $y \in (-\infty; 3\rangle$ $\Rightarrow$ $y \le 3$,
- $y \in (-1; 6)$ $\Rightarrow$ $y < 6$,

$\Rightarrow$ pokud stačí splnit jednu z podmínek, stačí, když platí $y < 6$ (splňuje tak druhou podmínku a na první nezáleží).

Pro hledaná *y* platí: $y < 6$ $\Rightarrow$ $y \in (-\infty; 6)$.

Příklad můžeme snadno vyřešit obrázkem. Nakreslíme si oba intervaly a hledáme čísla, která patří alespoň do jednoho z nich.



Číslem *y* může být libovolné číslo z intervalu $y \in (-\infty; 6)$.

Př. 11: Jarda převážel na káře židle nakoupené v obchodě. Ještě 5 km od obchodu náklad kontrolovat a židle byly v pořádku. Při další kontrole (9 km od obchodu) jedna židle chybí. Jak daleko od obchodu mohla židle vypadnout? Vypiš všechny možné vzdálenosti.

Židle mohla vypadnout ne libovolné vzdálenost větší než 5 km a menší než 9 km. Řešením jsou tedy všechny čísla v intervalu $(5; 9)$.

Shrnutí: Hraniční body do otevřeného intervalu nepatří $\Rightarrow$ prázdné kolečko, kulaté závorky.