

3.2.21 Lineární nerovnice I

Předpoklady: 030201

Pedagogická poznámka: Hodinu je důležité řídit tak, aby stihla propuknout diskuse o bodu 8c). S vyjasněním však nespěchám, aby žáci (ti, kteří chtějí) mohli o problému přemýšlet ještě doma.

Př. 1: Zapiš množiny pomocí intervalů.

$$\text{a) } A = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq x < \sqrt{6}\} \quad \text{b) } B = \{x \in \mathbb{R}; 5 \leq x\} \quad \text{c) } C = \{x \in \mathbb{Z}; 3 \leq x < \sqrt{10}\}$$

$$\text{a) } A = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq x < \sqrt{6}\}$$

$$A = \langle -3; \sqrt{6} \rangle$$

$$\text{b) } B = \{x \in \mathbb{R}; 5 \leq x\}$$

$$B = \langle 5; \infty \rangle$$

$$\text{c) } C = \{x \in \mathbb{Z}; 3 \leq x < \sqrt{10}\}$$

$$C = \{3\}$$

Př. 2: Zápis $2(x+3)-1 \leq 3x+2$ se nazývá nerovnice. Jaký je rozdíl mezi rovnicí a nerovnicí? Rozhodni dosazením, zda jsou řešením této nerovnice čísla $\{-2; 0; 1; 3; 5\}$. Odhadni, jak vypadá množina všech řešení této nerovnice.

Jiný znak mezi levou a pravou stranou \Rightarrow strany se nemusí rovnat, pravá může být větší než levá.

Čísla dosadíme a uvidíme, zda nerovnice vyjde.

- $x = -2$: $2(-2+3)-1 \leq 3(-2)+2$
 $2 \cdot 1 - 1 \leq -6 + 2$
 $1 \leq -4 \Rightarrow$ není pravda \Rightarrow číslo -2 není řešením nerovnice.
- $x = 0$: $2(0+3)-1 \leq 3 \cdot 0 + 2$
 $6 - 1 \leq 2$
 $5 \leq 2 \Rightarrow$ není pravda \Rightarrow číslo 0 není řešením nerovnice.
- $x = 1$: $2(1+3)-1 \leq 3 \cdot 1 + 2$
 $2 \cdot 4 - 1 \leq 3 + 2$
 $7 \leq 5 \Rightarrow$ není pravda \Rightarrow číslo 1 není řešením nerovnice.
- $x = 3$: $2(3+3)-1 \leq 3 \cdot 3 + 2$
 $2 \cdot 6 - 1 \leq 9 + 2$
 $11 \leq 11 \Rightarrow$ pravda \Rightarrow číslo 3 je řešením nerovnice.

- $x = 5: 2(5+3) - 1 \leq 3 \cdot 5 + 2$

$$2 \cdot 8 - 1 \leq 15 + 2$$

$15 \leq 17 \Rightarrow$ pravda \Rightarrow číslo 5 je řešením nerovnice.

Čísla menší než 3 nebyla řešením, číslo větší než 3 je řešením a pro číslo 3 se rovnaly obě strany nerovnice \Rightarrow zdá se, že řešením je interval $\langle 3; \infty \rangle$.

Pedagogická poznámka: Když v zadání nebylo přímo uvedeno "rozhodni dosazením" žáci spontánně řešili úlohu jako rovnici pomocí ekvivalentních úprav.

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu se snažím, aby žáci volili co nejrůznější čísla, v rámci třídy jich tak dokážeme vyzkoušet docela slušný počet.

Př. 3: Zvol číslo, pro které by nerovnice vyjít měla a vyzkoušej, zda opravu vyjde.

Zdá se, že řešením je interval $\langle 3; \infty \rangle \Rightarrow$ volíme číslo větší než 3: $x = 4$.

$$x = 4: 2(4+3) - 1 \leq 3 \cdot 4 + 2$$

$$2 \cdot 7 - 1 \leq 12 + 2$$

$13 \leq 14 \Rightarrow$ pravda \Rightarrow číslo 4 je řešením nerovnice.

Př. 4: Zvol číslo, pro které by nerovnice vyjít neměla a vyzkoušej, zda opravu nevyjde. Můžeme se dosazováním přesvědčit o tom, že jsme řešení nerovnice odhadli správně?

Zdá se, že řešením je interval $\langle 3; \infty \rangle \Rightarrow$ volíme číslo menší než 3: $x = 2$.

$$x = 2: 2(2+3) - 1 \leq 3 \cdot 2 + 2$$

$$2 \cdot 5 - 1 \leq 6 + 2$$

$9 \leq 8 \Rightarrow$ není pravda \Rightarrow číslo 2 není řešením nerovnice.

Obě kontroly dosazováním sice vyšly, ale o správnosti našeho odhadu jsme se zcela jistě nepřesvědčili, protože chybí vyzkoušet ještě nekonečně mnoho dalších čísel, pro která nerovnice vyjít měla, a nekonečně mnoho čísel, pro která by vyjít neměla.

Co když se dosazováním netrefíme? Jak řešit nerovnice?

U rovnic jsme pomocí ekvivalentních úprav postupně zjednodušovali rovnici abychom se dostali k nejjednoduššímu tvaru, ze kterého je řešení zcela zřejmé \Rightarrow zkusíme stejným způsobem postupně zjednodušovat naši nerovnici a uvidíme, zda se nám ukáže řešení podobně jako u rovnic.

$$2(x+3) - 1 \leq 3x + 2$$

$$2x + 6 - 1 \leq 3x + 2$$

$$2x + 5 \leq 3x + 2 \quad / -2$$

$$2x + 3 \leq 3x \quad / -2x$$

$3 \leq x \Rightarrow$ řešením je opravdu interval $\langle 3; \infty \rangle$.

Př. 5: Zapiš řešení nerovnic.

a) $x \geq 3$ b) $x < -10$ c) $x > -\frac{\sqrt{2}}{7}$ d) $x \leq 2\pi$

a) $x \geq 3$ $K = \langle 3; \infty \rangle$

b) $x < -10$ $K = (-\infty; -10)$

c) $x > -\frac{\sqrt{2}}{7}$ $K = \left(-\frac{\sqrt{2}}{7}; \infty \right)$

d) $x \leq 2\pi$ $K = (-\infty; 2\pi]$

Pedagogická poznámka: První dvě nerovnice jsou tak přehledné, že většina žáků je schopná najít řešení z hlavy. Rozhodně tomu nebráním, naopak uvádím jako štěstí, že jsme schopni řešení kontrolovat úvahou (a tak se utvrdit v tom, že používání ekvivalentních úprav dává smysl).

Pedagogická poznámka: Bod c) řešíme až při kontrole, během počítání na něj v lavicích neupozorňuji. Spíš poté, co problém vyhřeze při kontrole, připomínám, že je třeba si výsledky kontrolovat nějakým výpočtem a v nejhorším případě alespoň se zeptat souseda, zda k něčemu dospěl.

Př. 6: Vyřeš nerovnice pomocí ekvivalentních úprav. Své řešení ověř dosazením čísla, který by vyjít mělo a dosazením čísla, které by vyjít nemělo.

a) $x - 2 > 3$ b) $x + 4 < -2$ c) $-x < 3$ d) $2x + 4 \geq 0$

a) $x - 2 > 3$ $/+2$

$x > 5$ $K = (5; \infty)$

Ověření:

- $x = 6$: $6 - 2 = 4 > 3$ v pořádku, mělo vyjít a vyšlo.
- $x = 4$: $4 - 2 = 2 > 3$ v pořádku, nemělo vyjít a nevyšlo.

b) $x + 4 < -2$ $/-4$

$x < -6$ $K = (-\infty; -6)$

Ověření:

- $x = -7$: $-7 + 4 = -3 < -2$ v pořádku, mělo vyjít a vyšlo.
- $x = 10$: $10 - 2 = 8 < -2$ v pořádku, nemělo vyjít a nevyšlo.

c) $-x < 3$

Problém: dva možné postupy.

Přičítání:

$-x < 3$ $/+x$

$0 < 3 + x$ $/-3$

$-3 < x$ $K = (-3; \infty)$

Násobení:

$-x < 3$ $/\cdot(-1)$

$x < -3$ $K = (-\infty; -3)$

Test možné správnosti:

$$x = 1: -1 < 3 \text{ (mělo vyjít a vyšlo)}$$

$$x = -4: -(-4) = 4 \not< 3 \text{ (nemělo vyjít a vyšlo)}$$

Test možné správnosti:

$$x = -5: -(-5) = 5 \not< 3 \text{ (mělo vyjít a vyšlo)}$$

$$x = 4: -4 < 3 \text{ (nemělo vyjít a vyšlo)}$$

Proč oba postupy vedou k různým výsledkům? Proč je špatný (nevychází zkouška) postup, ve kterém násobíme? Více příští hodinu?

$$\text{d) } 2x + 4 \geq 0 \quad / -4$$

$$2x \geq -4 \quad / :2$$

$$x \geq -2 \quad K = \langle -2; \infty \rangle$$

Ověření:

- $x = 0: 2 \cdot 0 + 4 = 4 \geq 0$ v pořádku, mělo vyjít a vyšlo.
- $x = -3: 2 \cdot (-3) + 4 = -2 \geq 0$ v pořádku, nemělo vyjít a vyšlo.

Shrnutí: O tom, zda je určité číslo řešením nerovnice, můžeme rozhodnout dosazením.