

3.2.22 Lineární nerovnice II

Předpoklady: 030222

Jak je to s problémem z minulé hodiny?

Získali jsme dvě řešení nerovnice $-x < 3$:

Správné řešení.

$$-x < 3 \quad /+x$$

$$0 < 3+x \quad /-3$$

$$-3 < x \quad K = (-3; \infty)$$

Nesprávné řešení

$$-x < 3 \quad / \cdot (-1)$$

$$x < -3 \quad K = (-\infty; -3)$$

Test možné správnosti:

$$x = 1: -1 < 3 \text{ (mělo vyjít a vyšlo)}$$

$$x = -4: -(-4) = 4 \not< 3 \text{ (nemělo vyjít a nevyšlo)}$$

Test možné správnosti:

$$x = -5: -(-5) = 5 \not< 3 \text{ (mělo vyjít a nevyšlo)}$$

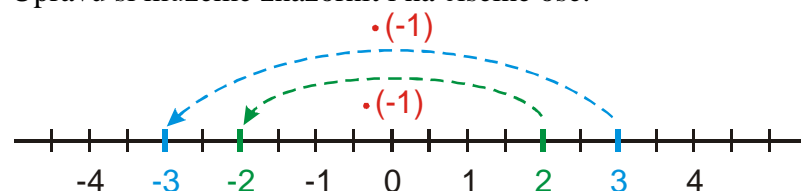
$$x = 4: -4 < 3 \text{ (nemělo vyjít a vyšlo)}$$

Kde se stala chyba. Do té doby jsme využívali postupy z řešení rovnic a nic se nedělo. Je problém v násobení číslem (-1) ? Vyzkoušíme si tuto úpravu na číslech.

$$2 < 3 \quad / \cdot (-1)$$

$$-2 \not< -3$$

Úpravu si můžeme znázornit i na číselné ose:

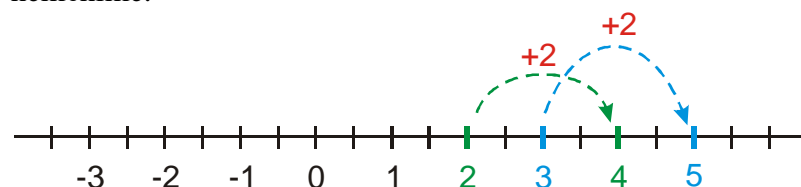


Vynásobení (-1) obrátilo postavení čísel na číselné ose (z většího čísla 3 udělalo menší číslo -3) \Rightarrow tuto skutečnost musíme při řešení zohlednit a obrátit znaménko nerovnosti:

$$2 < 3 \quad / \cdot (-1)$$

$$-2 > -3 \quad \text{(násobili jsme záporným číslem -1, které obrátilo situaci na ose a proto obracíme i znaménko nerovnosti).}$$

Při přičítání (i odečítání) reálných čísel se ni c podobného neděje, proto znaménko nerovnosti neměníme.



$$2 < 3 \quad /+2$$

$$4 < 5$$

Která čísla budou při násobení převracet stejně jako (-1) ?

Všechna záporná čísla.

Bude převrácení nastávat jenom při násobení?

Bude nastávat i při dělení (dělením kladného čísla záporným získáme záporné číslo).

⇒ Při násobení záporným číslem se změní znaménko obou čísel v nerovnosti a tím se změní i jejich nerovnost (z menšího se stane větší) ⇒ pokud budeme násobit nerovnici záporným číslem, musíme nerovnost obrátit.

Při řešení nerovnic můžeme používat stejné úpravy jako při řešení rovnic (přičítání a odečítání reálných čísel, násobení a dělení kladnými reálnými čísly). Pokud nerovnici vynásobíme nebo vydělíme záporným číslem, musíme obrátit znaménko nerovnosti.

Př. 1: Vyřeš nerovnice.

a) $x - 3 \geq 5$

b) $5x \leq -2$

c) $3 - 4x > 3$

d) $\frac{x}{4} - 1 < \frac{1}{3}$

a) $x - 3 \geq 5 \quad / +3$

$x \geq 8 \quad K = \langle 8; \infty \rangle$

b) $5x \leq -2 \quad / :5$

$x \leq -\frac{2}{5} \quad K = \left(-\infty; -\frac{2}{5} \right]$

c) $3 - 4x > 3 \quad / -3$

$-4x > 0 \quad / :(-4)$

$x < 0 \quad K = (-\infty; 0)$

d) $\frac{x}{4} - 1 < \frac{1}{3} \quad / +1$

$\frac{x}{4} < \frac{4}{3} \quad / \cdot 4$

$x < \frac{16}{3} \quad K = \left(-\infty; \frac{16}{3} \right)$

Př. 2: Vyřeš nerovnice.

a) $2x - 3 \geq 3(x - 1) - x$

b) $2(x - 7) + 3x \leq 4 - 5x$

c) $2 - 3x \leq x + 4(1 - x) - 2$

a) $2x - 3 \geq 3(x - 1) - x$

$2x - 3 \geq 3x - 3 - x$

$2x - 3 \geq 2x - 3 \quad / +3$

$2x \geq 2x \quad / -2x$

$0x \geq 0$ - můžeme za x dosadit libovolné číslo a nerovnice vyjde (vyhovuje i situace, kdy se obě strany rovnají) ⇒ $K = R$.

b) $2(x - 7) + 3x \leq 4 - 5x$

$2x - 14 + 3x \leq 4 - 5x$

$$5x - 14 \leq 4 - 5x \quad / +14$$

$$5x \leq 18 - 5x \quad / +5x$$

$$10x \leq 18 \quad / :10$$

$$x \leq 1,8 \quad K = (-\infty; 1,8)$$

c) $2 - 3x \leq x + 4(1 - x) - 2$

$$5 - 3x \leq x + 4 - 4x - 2$$

$$5 - 3x \leq 2 - 3x \quad / -2$$

$$3 - 3x \leq -3x \quad / +3x$$

$$3 \leq 0x - \text{at' dosadíme } x \text{ cokoliv, rovnice nikdy nevyjde} \Rightarrow K = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: U bodů a) a c) je třeba se nesnažit o nějaká pravidla typu: "Když je vlevo i vpravo nula, tak je řešením R ", ale trvat na tom, že žáci musí sami poznat (například dosazováním), zda nerovnice vyjde vždy nebo nikdy (pro mnoho z nich daleko přirozenější tuto skutečnost objevit na rádcích před poslední úpravou, kde se ještě vyskytuje neznámá a kam si mohou zkusmo dosazovat). Při kontrole si na tabuli píšeme různé "konečné stavy" těchto nerovnic a ukazujeme si, že všechny (pokud jsou správné) znamenají to samé.

Př. 3: Vyřeš nerovnice.

a) $\frac{3-2x}{5} \geq \frac{1}{2}$ b) $(x-3)(x+2) > (x-1)^2$ c) $2(x-1) + x > 3(x-2) + 1$

a) $\frac{3-2x}{5} \geq \frac{1}{2} \quad / \cdot 10$

$$2(3-2x) \geq 5$$

$$6-4x \geq 5 \quad / -6$$

$$-4x \geq -1 \quad / :(-4)$$

$$x \leq \frac{1}{4} \quad K = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$$

b) $(x-3)(x+2) > (x-1)^2$

$$x^2 + 2x - 3x - 6 > x^2 - 2x + 1 \quad / -x^2$$

$$-x - 6 > -2x + 1 \quad / +2x$$

$$x - 6 > 1 \quad / +6$$

$$x > 7 \quad K = (7; \infty)$$

c) $2(x-1) + x > 3(x-2) + 1$

$$2x - 2 + x > 3x - 6 + 1$$

$$3x - 2 > 3x - 5 \quad / -3x$$

$$-2 > -5 \quad K = R$$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je zamětnání pro rychlejší žáky.

Př. 4: Najdi všechna čísla, která můžeme dosadit místo písmenka p , aby řešením nerovnice byla všechna reálná čísla.

a) $2x + p \geq 3(x-1) - x$ b) $x + p + 4 < 1 - 2(x-p)$ c) $p(x-2) \geq 2x + 3 - p$

Upravíme si nerovnici do stavu, ze kterého je více vidět.

a) $2x + p \geq 3x - 3 - x$

$2x + p \geq 2x - 3 \quad / -2x$

$p \geq -3$ Z nerovnice zmizela neznámá (v předchozím kroku byl na obou stranách výraz $2x$, který se odečetl \Rightarrow na hodnotě x nezáleží) \Rightarrow pokud bude nerovnost platná, řešením nerovnice budou všechna reálná čísla \Rightarrow musí platit $p \geq -3 \Rightarrow p \in \langle -3; \infty \rangle$.

b) $x + p + 4 < 1 - 2(x-p)$

$x + p + 4 < 1 - 2x + 2p$

$x + p + 4 < 1 - 2x + 2p \quad / +2x$

$3x + p + 4 < 1 + 2p \quad / -p$

$3x + 4 < 1 + p \quad / -4$

$3x < p - 3 \quad / :3$

$x < \frac{p-3}{3} \Rightarrow$ řešením nerovnice nikdy nebudou všechna reálná čísla. Ať zvolíme za p

jakékoli číslo, vždy bude pravá strana rovna nějakému číslu a za x budeme moci dosazovat pouze čísla menší.

c) $p(x-2) \geq 2x + 3 - p$

$px - 2p \geq 2x + 3 - p \quad / -2x$

$px - 2x - 2p \geq 3 - p \quad / +2p$

$px - 2x \geq 3 + p$

$x(p-2) \geq 3 + p$

Pokud mají být řešením nerovnice všechna reálná čísla, musí zmizet proměnná $x \Rightarrow$ závorka $(p-2)$ se musí rovnat nule $\Rightarrow p = 2$. Zkusíme tuto hodnotu za p dosadit:

$x(2-2) \geq 3+2$

$x \cdot 0 \geq 5$ tato nerovnost neplatí \Rightarrow není možné najít takovou hodnotu za číslo p , aby řešením nerovnice byla všechna reálná čísla.

Pedagogická poznámka: Poslední příklad je domácí procvičování pro žáky, kteří měli problémy s body a) a c) v příkladu 2.

Př. 5: Vyřeš nerovnice.

a) $x - 3 \geq x + 1$

b) $0 \cdot x \leq 5$

c) $3 - 3x > 3 - 3x$

d) $4 - 2x \leq 3 - 2x$

a) $x - 3 \geq x + 1 \quad / -x$

$-3 \geq 1$ Neplatná nerovnost, už ze zadání je jasné, že hodnota levé straně bude menší než hodnota pravé (vlevo od x odečítáme, vpravo k němu přičítáme) $\Rightarrow K = \emptyset$.

b) $0 \cdot x \leq 5$

Nerovnost platí pro všechna reálná čísla (na levé straně bude po vynásobení vždy nula) $\Rightarrow K = R$.

c) $3 - 3x > 3 - 3x \quad / +3x$

$3 > 3 \quad / -3$

$0 > 0$ Neplatná nerovnost, už od zadání je zřejmé, že na obou stranách vyjde stejná hodnota, což nevyhovuje zadání (levá strana má být větší) $\Rightarrow K = \emptyset$.

d) $4 - 2x \leq 3 - 2x \quad / +2x$

$4 \leq 3$ Neplatná nerovnost, už ze zadání je jasné, že hodnota levé strany bude větší než hodnota pravé (vlevo odečítáme stejné číslo $2x$ od většího čísla než na pravé) $\Rightarrow K = \emptyset$.

Shrnutí: Pokud nerovnici vynásobíme nebo vydělíme záporným číslem, musíme obrátit znaménko nerovnosti.