

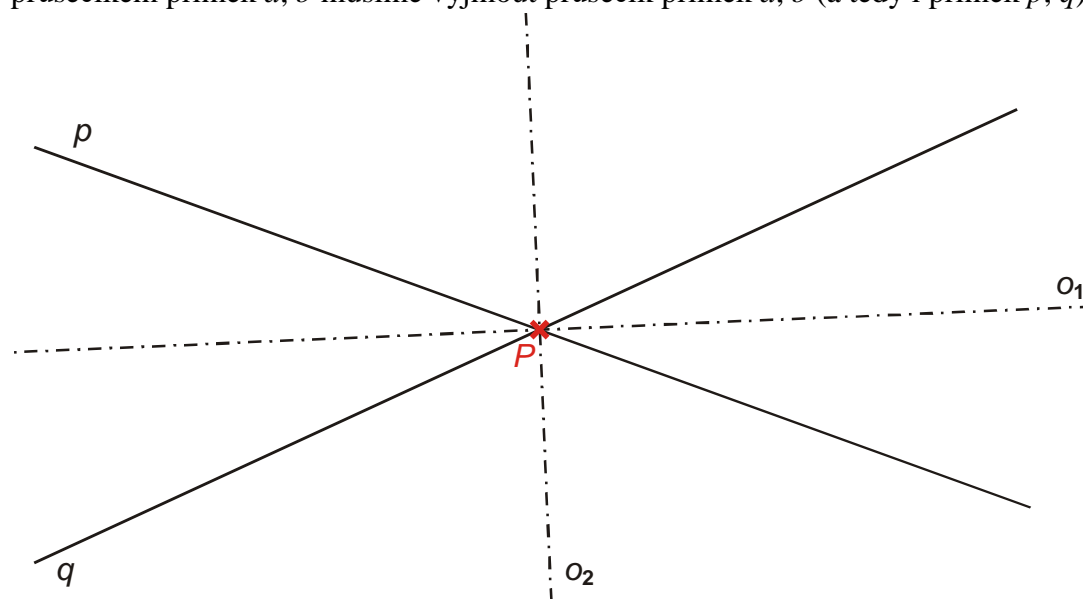
### 3.3.8 Hledání kružnic

**Předpoklady:** 030307

**Př. 1:** Rozhodni, zda je následující věta pravdivá:

"Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných různoběžných přímek  $a, b$  je sjednocení dvou navzájem kolmých přímek  $p$  a  $q$ . Přímky  $p, q$  jsou přímkami, na kterých leží osy úhlů vytvořených přímkami  $a, b$ ."

Věta pravdivá není. Sjednocení obou přímek obsahuje i jejich průsečík, který je zároveň i průsečíkem přímek  $a, b$  musíme vyjmout průsečík přímek  $a, b$  (a tedy i přímek  $p, q$ ).



**Pedagogická poznámka:** K příkladu 2 nejdříve nic neříkám, poté se snažím žáky navést k tomu, aby si nakreslili obrázek.

**Př. 2:** Doplň věty:

- Množina středů všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které procházejí daným bodem  $A$ , je ....
- Množina středů všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které se dotýkají dané přímky  $p$ , je ...
- Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných rovnoběžek  $a, b$ , je ....
- Množina středů všech kružnic, které procházejí dvěma danými body  $A, B$  ( $A \neq B$ ), je .....

a) Množina středů všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které procházejí daným bodem  $A$ , je kružnice  $k(A; r)$ .

b) Množina středů všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které se dotýkají dané přímky  $p$ , je dvojice s přímkou  $p$  rovnoběžných přímek  $a, b$ , které jsou od přímky  $p$  vzdáleny o  $r$ .

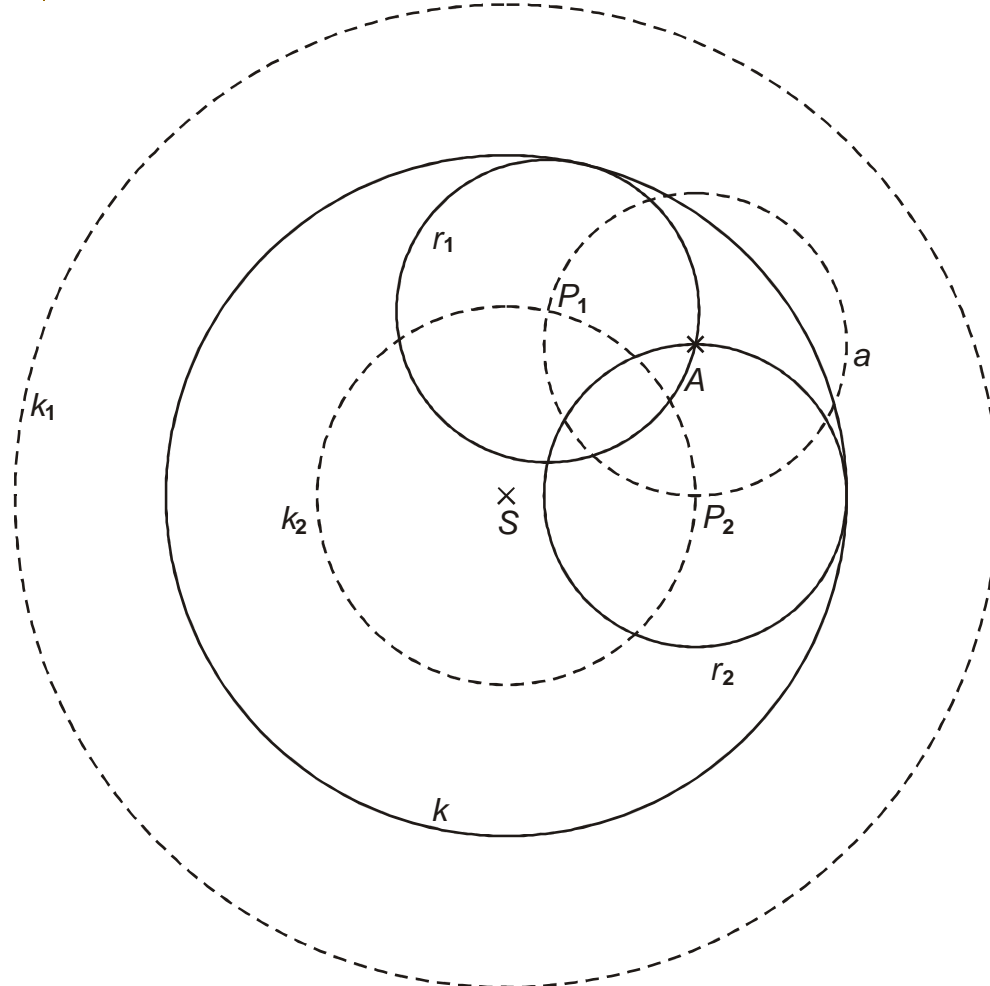
c) Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných rovnoběžek  $a, b$ , je přímka  $p$  rovnoběžná s přímkami  $a, b$  a od obou stejně vzdálená (procházející osou libovolné úsečky, jejíž krajní body leží na přímkách  $a, b$  a která je na přímkách  $a, b$  kolmá).

d) Množina středů všech kružnic, které procházejí dvěma danými body  $A, B$  ( $A \neq B$ ), je osa úsečky  $AB$ .

**Př. 3:** Je dána kružnice  $k(S; 4,5 \text{ cm})$ . Uvnitř kružnice leží bod  $A$ . Narýsuj všechny kružnice o poloměru  $2 \text{ cm}$ , které procházejí bodem  $A$  a dotýkají se kružnice  $k$ . Pojmenuj množiny bodů, které jsi ke konstrukci použil. Napiš postup konstrukce. Má úloha vždy řešení?

Hledáme kružnici o poloměru  $2 \text{ cm} \Rightarrow$  musíme najít její střed. Pro střed kružnice musí platit:

- dotýká se kružnice  $k \Rightarrow$  leží na kružnici, která má střed v bodě  $S$  a jejíž poloměr o  $2 \text{ cm}$  menší nebo o  $2 \text{ cm}$  větší než poloměr kružnice  $k$ ,
- prochází bodem  $A \Rightarrow$  vzdálenost středu kružnice od bodu  $A$  je rovná  $2 \text{ cm} \Rightarrow$  střed kružnice leží na kružnici se středem v bodu  $A$  a poloměru  $2 \text{ cm}$ .

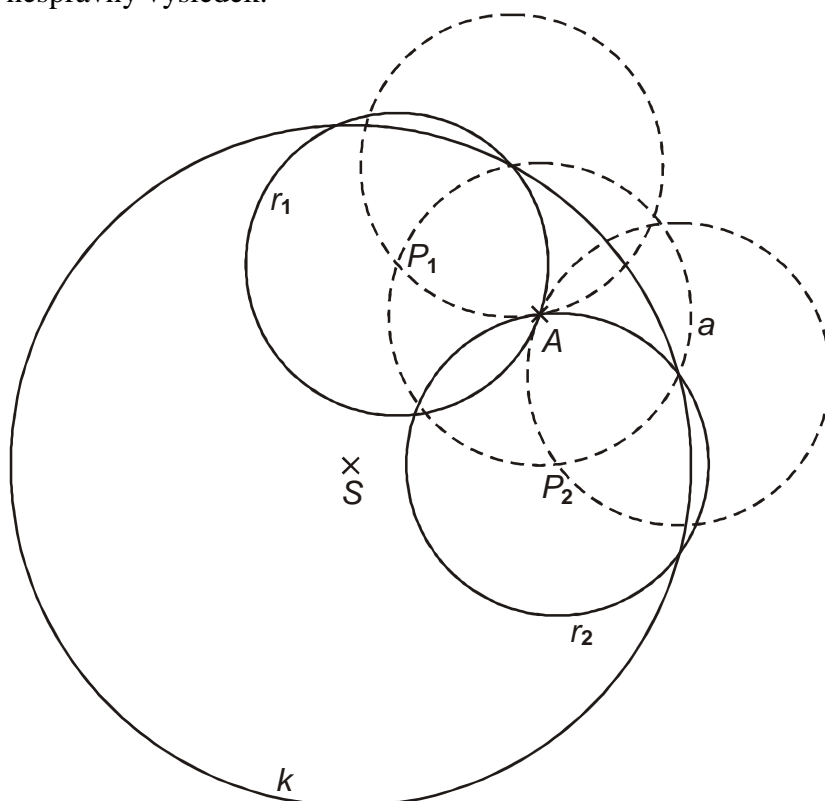


1. kružnice  $k(S; 4,5 \text{ cm})$ , bod  $A$  uvnitř kružnice

2. kružnice  $k_1(S; 6,5 \text{ cm})$ ,  $k_2(S; 2,5 \text{ cm})$

3. kružnice  $l(A; 2 \text{ cm})$
4. body  $P_1; P_2$ , průsečíky kružnice  $l(A; 2 \text{ cm})$  s kružnicí  $k_2(S; 2,5 \text{ cm})$
5. kružnice  $r_1(P_1; 2 \text{ cm})$ ,  $r_2(P_2; 2 \text{ cm})$

**Pedagogická poznámka:** Žáci velmi často používají nezdůvodněnou nesprávnou konstrukci, narýsují kružnici  $l(A; 2 \text{ cm})$ , najdou její průsečíky s kružnicí  $k$  a z těchto průsečíků udělají další dvě kružnice o poloměru 2 cm. Průsečíky těchto kružnic s kružnicí  $l$  pak označí jako středy hledaných kružnic, čímž získají následující nesprávný výsledek.



Je dobré si ho s nimi pozorně prohlédnout a rozebrat, že nalezené kružnice procházejí bodem  $A$  (protože leží na kružnici  $a$ ), ale nedotýkají se kružnice  $k$  (protože neleží na kružnici označené ve správném řešení  $k_2$ , ale leží na kružnici, která je množinou bodů vzdálených 2 cm ne od kružnice  $k$ , ale od průsečíku kružnice  $a$  s kružnicí  $k$  – tímto průsečíkem pak nalezená kružnice prochází).

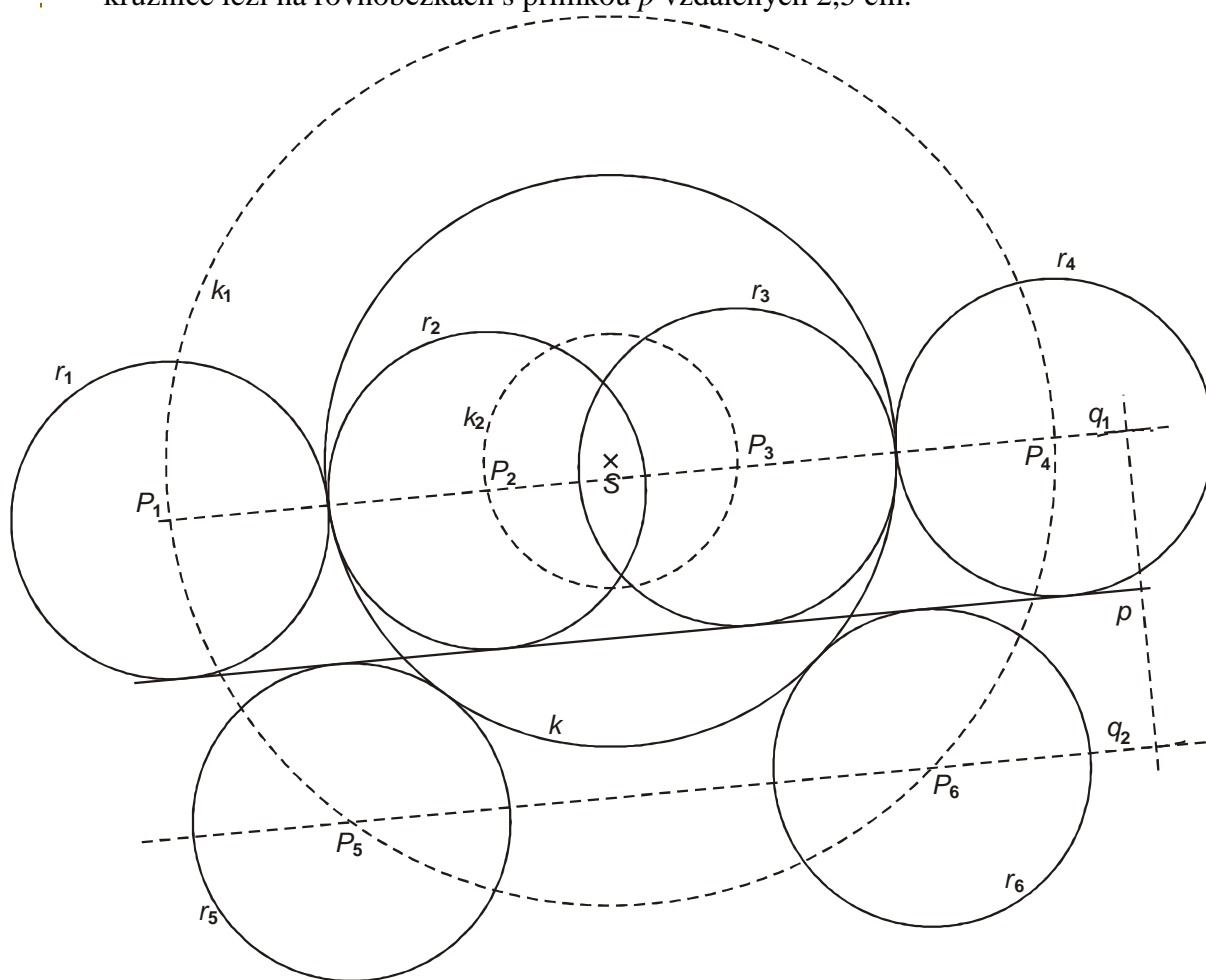
**Dodatek:** Kružnici  $k_1$  bychom samozřejmě rýsovat nemuseli. Jestliže bod  $A$  leží uvnitř kružnice, je zřejmé, že kružnice  $a$  se středem v bodě  $A$  se s ní nemůže protnout.

**Př. 4:** Je dána kružnice  $k(S; 4,5 \text{ cm})$  a přímka  $p$ , která je její sečnou. Najdi všechny kružnice o poloměru 2,5 cm, které se dotýkají přímky  $p$  i kružnice  $k$ .

Hledáme kružnici o poloměru 2,5 cm  $\Rightarrow$  musíme najít její střed. Pro střed kružnice musí platit:

- dotýká se kružnice  $k \Rightarrow$  leží na kružnici, která má střed v bodě  $S$  a jejíž poloměr o 2,5 cm menší nebo o 2,5 cm větší než poloměr kružnice  $k$ ,

- dotýká se přímky  $p \Rightarrow$  vzdálenost středu kružnice od bodu  $p$  je rovná 2,5 cm  $\Rightarrow$  střed kružnice leží na rovnoběžkách s přímkou  $p$  vzdálených 2,5 cm.

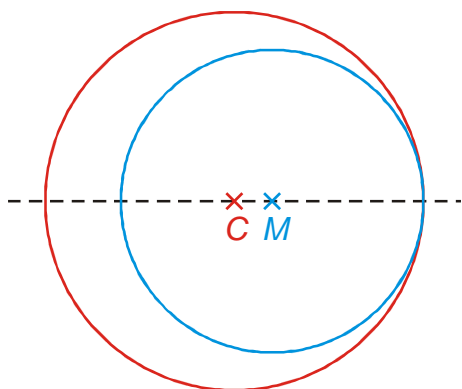


1. kružnice  $k(S; 4,5 \text{ cm})$ , přímka  $p$  sečna kružnice  $k$
2. kružnice  $k_1(S; 7 \text{ cm})$ ,  $k_2(S; 2 \text{ cm})$
3. přímky  $q_1, q_2$ , rovnoběžky s přímkou  $p$ , vzdálené 2,5 cm
4. body  $P_1; P_2; P_3; P_4; P_5; P_6$ , průsečíky kružnic  $k_1, k_2$  s přímkami  $q_1, q_2$
5. kružnice  $r_1(P_1; 2,5 \text{ cm})$ ,  $r_2(P_2; 2,5 \text{ cm})$ ,  $r_3(P_3; 2,5 \text{ cm})$ ,  $r_4(P_4; 2,5 \text{ cm})$ ,  $r_5(P_5; 2,5 \text{ cm})$ ,  $r_6(P_6; 2,5 \text{ cm})$

**Př. 5:** Je dána kružnice  $k(S; 3 \text{ cm})$ . Vně kružnice leží bod  $A$ ,  $|SA| = 4 \text{ cm}$ . Najdi všechny kružnice o poloměru 4 cm, které se dotýkají kružnice  $k$  a prochází bodem  $A$ .

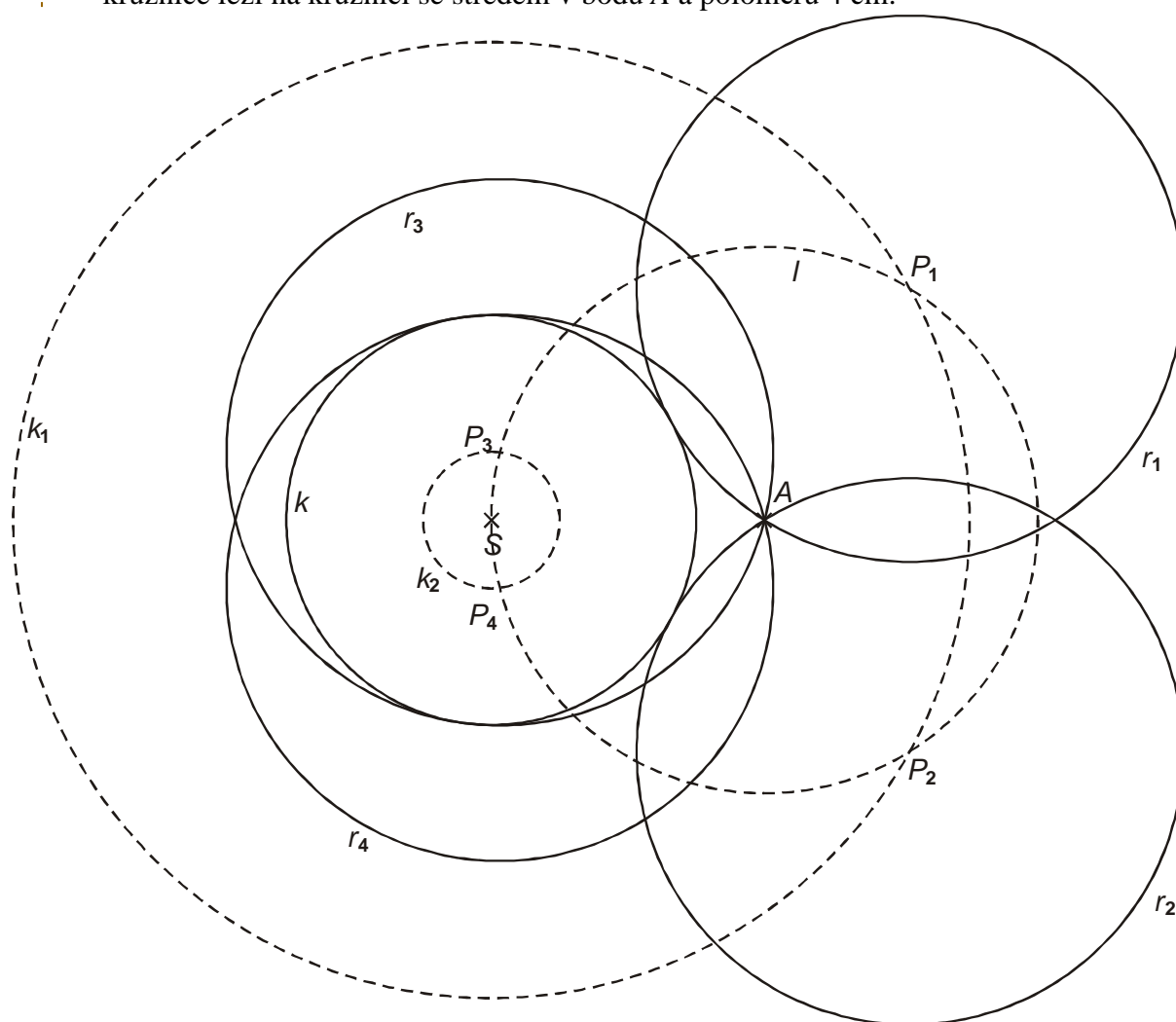
Hledáme kružnici o poloměru 4 cm  $\Rightarrow$  musíme najít její střed. Pro střed kružnice musí platit:

- dotýká se kružnice  $k \Rightarrow$  leží na kružnici, která má střed v bodě  $S$  a jejíž poloměr o 4 cm větší nebo o 4 cm menší než poloměr kružnice  $k$ , druhá možnost je zdnalivě nesmyslná (kružnice měl poloměr  $-1$ ), můžeme si ale představit, že nalezený střed červené kružnice na obrázku leží na opačné straně modré kružnice než bod, ve kterém se kružnice dotýkají



⇒ i druhá možnost dává matematicky smysl, pokud uděláme kružnici jejíž poloměr je absolutní hodnotou spočteného rozdílu,

- prochází bodem  $A$  ⇒ vzdálenost středu kružnice od bodu  $A$  je rovná 4 cm ⇒ střed kružnice leží na kružnici se středem v bodu  $A$  a poloměru 4 cm.



1. kružnice  $k(S; 3 \text{ cm})$ , bod  $A$ ,  $|SA| = 4 \text{ cm}$
2. kružnice  $k_1(S; 7 \text{ cm})$ ,  $k_2(S; 1 \text{ cm})$
3. kružnice  $l(A; 4 \text{ cm})$
4. body  $P_1; P_2; P_3; P_4$ , průsečíky kružnice  $l(A; 4 \text{ cm})$  s kružnicemi  $k_1(S; 7 \text{ cm})$ ,  $k_2(S; 1 \text{ cm})$
5. kružnice  $r_1(P_1; 4 \text{ cm})$ ,  $r_2(P_2; 4 \text{ cm})$ ,  $r_3(P_3; 4 \text{ cm})$ ,  $r_4(P_4; 4 \text{ cm})$

**Pedagogická poznámka:** Kružnice  $r_1$  a  $r_2$  žáci najdou snadno se zbývajícími dvěma je to horší. Podle toho, kolik zbývá času do konce hodiny je upozornuji, že jim něco chybí.

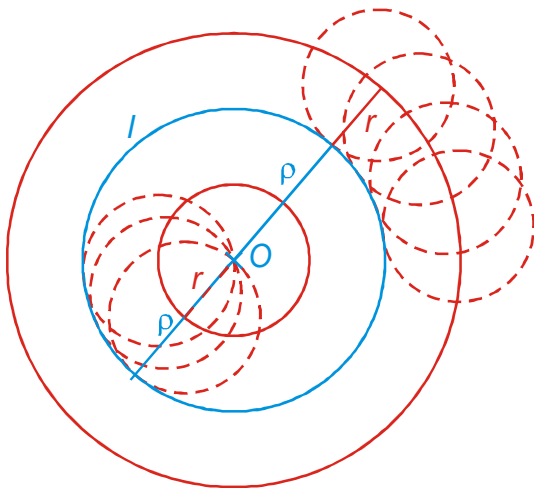
**Př. 6:** Doplně věty:

a) Množinou středu všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které se dotýkají dané kružnice  $l$  o středu  $O$  a poloměru  $\rho$  je v případě  $\rho > r$  sjednocení dvou soustředných kružnic, které mají střed ....

b) Množinou středu všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které se dotýkají dané kružnice  $l$  o středu  $O$  a poloměru  $\rho$  je v případě  $r > \rho$  .....

a) Množinou středu všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které se dotýkají dané kružnice  $l$  o středu  $O$  a poloměru  $\rho$  je v případě  $\rho > r$  sjednocení dvou soustředných kružnic, které mají střed ....

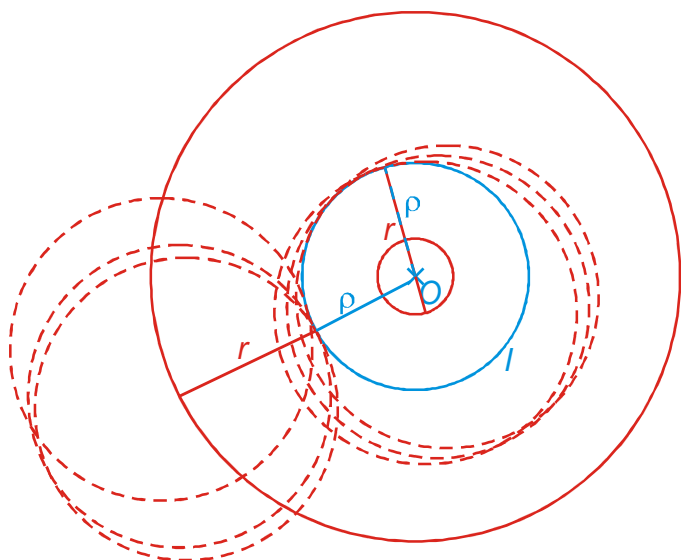
Nakreslíme si obrázek



Množinou středu všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které se dotýkají dané kružnice  $l$  o středu  $O$  a poloměru  $\rho$  je v případě  $\rho > r$  sjednocení dvou soustředných kružnic, které mají střed v bodě  $O$  a poloměr  $\rho + r$  nebo  $\rho - r$ .

b) Množinou středu všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které se dotýkají dané kružnice  $l$  o středu  $O$  a poloměru  $\rho$  je v případě  $r > \rho$  .....

Nakreslíme si obrázek



Množinou středu všech kružnic o daném poloměru  $r$ , které se dotýkají dané kružnice  $l$  o středu  $O$  a poloměru  $\rho$  je v případě  $r > \rho$  sjednocení dvou soustředných kružnic, které mají střed v bodě  $O$  a poloměr  $r + \rho$  nebo  $r - \rho$ .

**Pedagogická poznámka:** Bez obrázku je předchozí příklad velmi těžký. Jde tedy o první radu.

**Shrnutí:**