3.6.11 Konstrukce trojúhelníků I

Předpoklady: 030610

Př. 1: V geometrii se řeší dva základní druhy konstrukčních úloh – polohové a nepolohové úlohy. Přečti si obě následující zadání. V čem se polohové a nepolohové úlohy liší? U kterých z nich je řešení obtížnější?

Polohová úloha: Je dána úsečka *AB*, $|AB| = 6\text{ cm}$. Najdi všechny body *C* tak, aby pro trojúhelník *ABC* platilo: $a = 5\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$.

Nepolohová úloha: Sestroj všechny trojúhelníky *ABC* tak, aby platilo $a = 5\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$, $c = 6\text{ cm}$.

V obou případech zadáváme stejný trojúhelník (o stranách 5, 6,7).
Rozdíl:

- u polohové úlohy je zadáno, že jako první rýsujeme úsečku *AB*, teprve poté doděláme ostatní strany,
- u nepolohové úlohy můžeme jako první rýsovat libovolnou stranu.

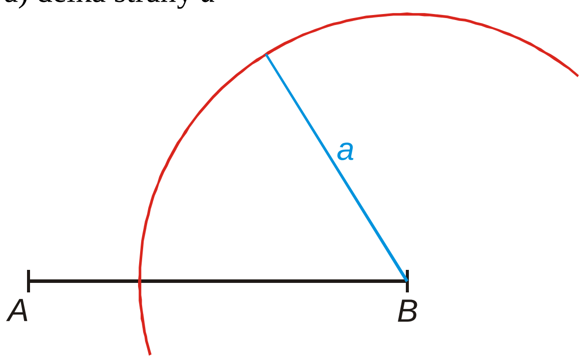
V tomto případě je zadání polohové i nepolohové úlohy stejně obtížné (jde o konstrukci trojúhelníku podle věty *sss*). Obecně ale mohou být polohové úlohy obtížnější, protože si nemůžeme vybrat, od kterého prvku konstrukci zahájíme.

Polohové úlohy simulují situaci, kdy máme narýsovat obrázek, který je součástí složitějšího rysu a musíme tedy vycházet z útvaru, který byl narýsován v předchozím kroku.

Př. 2: Z trojúhelníku *ABC* máme již narýsovanou stranu *AB* a hledáme vrchol *C*. Jakou čáru budeš kreslit, pokud znáš:

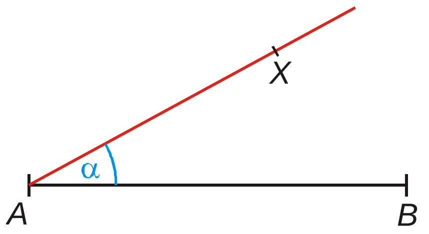
a) délku strany *a*, b) velikost úhlu α, c) výšku v_c,
d) těžnici t_c, e) poloměr kružnice opsané *r*?

a) délka strany *a*



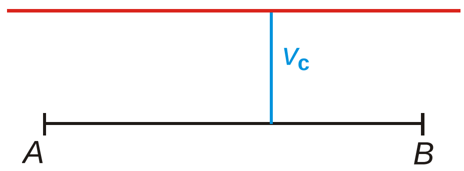
Pokud známe délku strany *a*, rýsujeme kružnici $k(B; a)$ (vzdálenost bodu *C* od bodu *B* je *a*).

b) velikost úhlu α



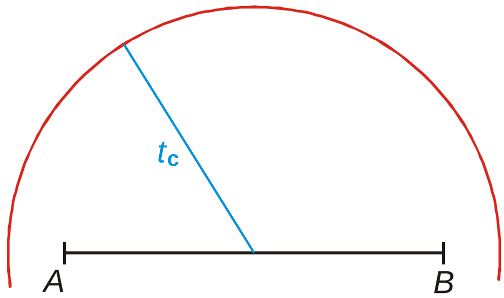
Pokud známe délku velikost úhlu α, rýsujeme polopřímku *AX*, která s úsečkou *AB* svírá úhel α.

c) výška v_c



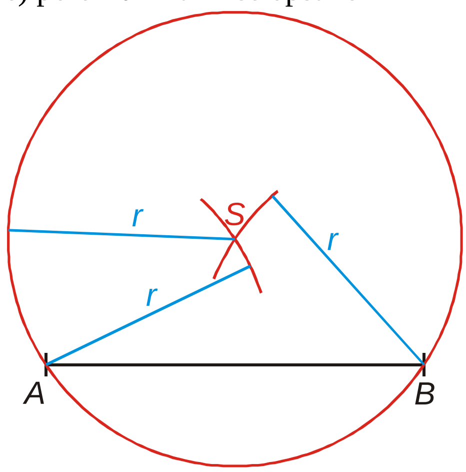
Pokud známe velikost výšky v_c, rýsujeme rovnoběžku se stranou *AB* ve vzdálenosti v_c.

d) těžnice t_c



Pokud známe velikost těžnice t_c, rýsujeme kružnici $k(S_{AB}; t_c)$ (vzdálenost bodu *C* od bodu S_{AB} je t_c).

e) poloměr kružnice opsané *r*

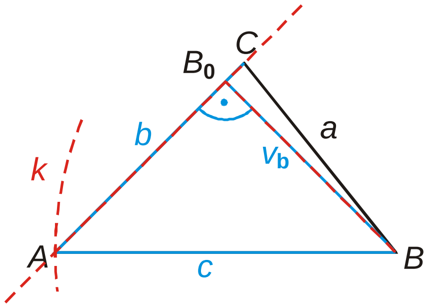


Pokud známe poloměr kružnice opsané, rýsujeme kružnici $k(S; r)$ (vzdálenost bodu *C* od bodu *B* je *r*, vzdálenost bodu *S* od bodů *A* a *B* je také *r*).

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu poměrně brzo nakreslíme na tabuli řešení bodu a) (včetně barevného rozlišení kreslené čáry a zadané hodnoty) jako vzor pro další body.

Př. 3: Sestroj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $b = 5\text{ cm}$, $c = 4{,}5\text{ cm}$, $v_b = 4\text{ cm}$. V rozboru hledej všechny způsoby řešení. Proveď kompletní řešení včetně rozboru a diskuse.

Rozbor



Narýsujeme úsečku BB_0, $|BB_0| = v_b = 4\text{ cm}$. Bod A najdeme jako průsečík:

- kružnice $k(B; c = 4{,}5\text{ cm})$ (bod A je od bodu B vzdálen 4,5 cm),
- polopřímky B_0X (výška v_b je kolmá na stranu b).

Bod C pak najdeme na přímce B_0X pomocí délky strany b.

Postup konstrukce

1. úsečka BB_0, $|BB_0| = v_b = 4\text{ cm}$.

2. $k(B; c = 4{,}5\text{ cm})$

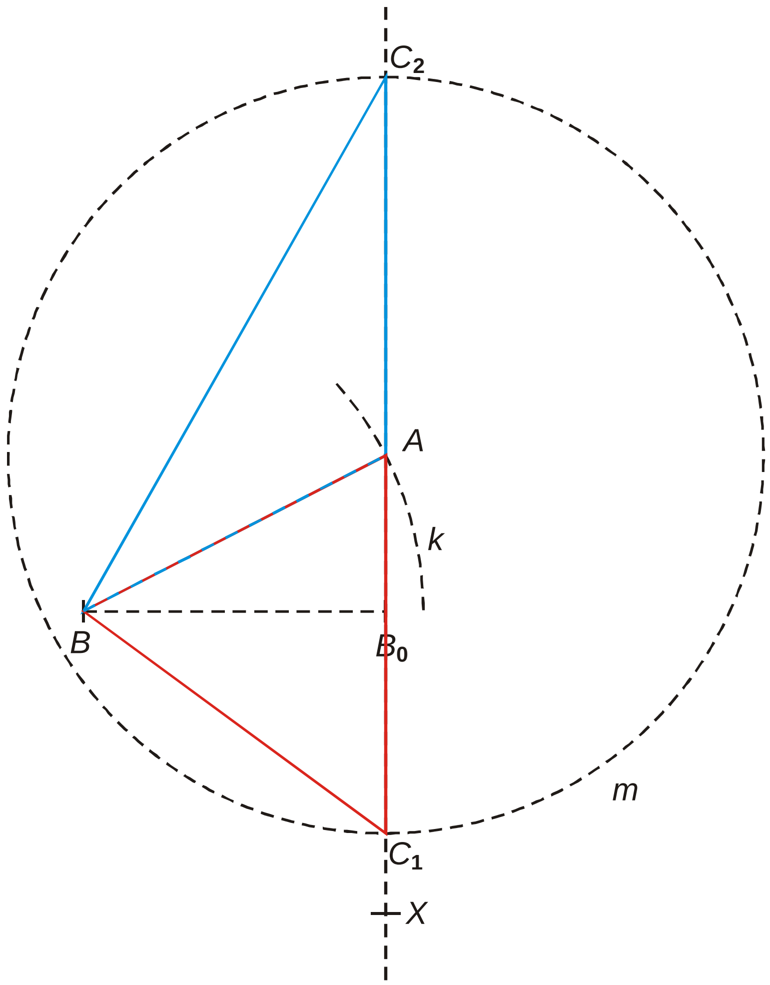
3. přímka B_0X, $B_0X \perp BB_0$

4. bod A, $A = B_0X \cap k$

5. bod C, $C \in B_0X; |CA| = b = 5\text{ cm}$ (hledáme pomocí kružnice $m(A; b = 5\text{ cm})$)

6. trojúhelník ABC

Konstrukce

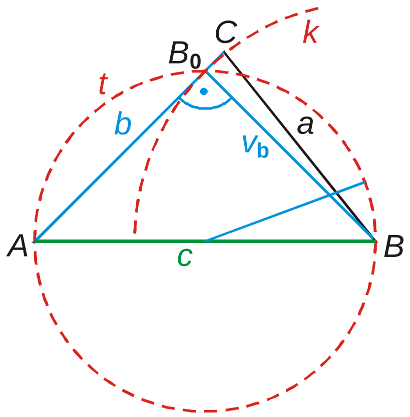


Zkouška správnosti
Výsledek odpovídá zadání (u obou trojúhelníků souhlasí všechny tři zadané velikosti).

Diskuse
Příklad má dvě řešení (na přímce B_0X najdeme vždy dva body, které jsou od bodu *A* vzdáleny o velikosti *b*). Ze dvou průsečíků kružnice *k* s přímkou B_0X využíváme pouze jeden, protože druhý je s prvním osově souměrný podle osy BB_0 a získali bychom tak z něj trojúhelníky, kterou jsou osově souměrné a tedy shodné s trojúhelníky, které jsme narýsovali).
Příklad má dvě řešení pokud existuje průsečík kružnice *k* s přímkou B_0X (pokud je délka strany *c* stejná nebo větší než velikost výšky v_b).

Př. 4: Je dána úsečka *AB*, $|AB| = c = 4,5\text{ cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí: $b = 5\text{ cm}$, $v_b = 4\text{ cm}$. V rozboru hledej všechny způsoby řešení.

Rozbor



Stejný trojúhelník jako v předchozím příkladu, ale musíme začít od úsečky *AB* (úloha je polohová).
Můžeme narýsovat trojúhelník ABB_0, hledáme bod B_0, který leží:

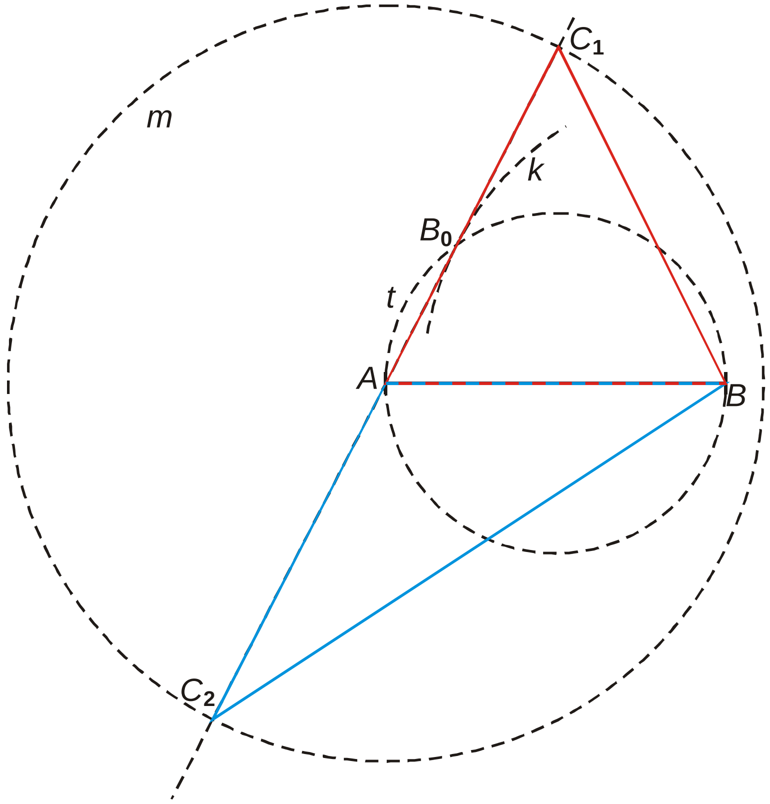
- na kružnici $k\left(B; v_b = 4\,\text{cm}\right)$ (bod B_0 je od bodu *B* vzdálen o velikost výšky 4 cm),
- na kružnici $t\left(S_{AB}; \left|\frac{AB}{2}\right|\right)$ - Thaletova kružnice – úhel u vrcholu B_0 je pravý.

Bod *C* pak najdeme na přímce AB_0 pomocí délky strany *b*.

Postup konstrukce

1. úsečka AB, $|AB| = c = 4{,}5\,\text{cm}$.
2. kružnice $k\left(B; v_b = 4\,\text{cm}\right)$
3. kružnice $t\left(S_{AB}; \left|\frac{AB}{2}\right|\right)$
4. bod B_0, $B_0 = t \cap k$
5. bod *C*, $C \in AB_0; |CA| = b = 5\,\text{cm}$ (hledáme pomocí kružnice $m\left(A; b = 5\,\text{cm}\right)$
6. trojúhelník *ABC*

Konstrukce

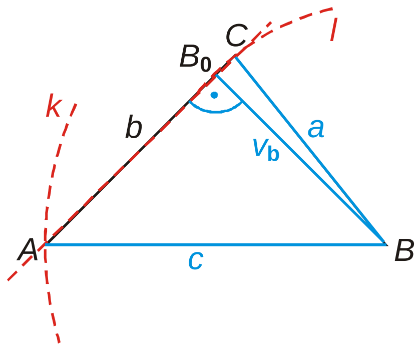


Zkouška správnosti
Výsledek odpovídá zadání (u obou trojúhelníků souhlasí všechny tři zadané velikosti).

Diskuse
Příklad má dvě řešení (na přímce AB_0 najdeme vždy dva body, které jsou od bodu *A* vzdáleny o velikosti *b*). Ze dvou průsečíků kružnic *k* a *t* využíváme pouze jeden, protože druhý je s prvním osově souměrný podle osy *AB* a získali bychom tak z něj trojúhelníky, kterou jsou osově souměrné a tedy shodné s trojúhelníky, které jsme narýsovali). Příklad má dvě řešení pokud existuje průsečík kružnice *k* s kružnicí *t* (pokud je délka strany *c* stejná nebo větší než velikost výšky v_b).

Př. 5: Sestroj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $a = 6\text{ cm}$, $c = 4\text{ cm}$, $v_b = 3\text{ cm}$. V rozboru hledej všechny způsoby řešení.

Rozbor



Narýsujeme úsečku BB_0, $|BB_0| = v_b = 3\text{ cm}$. Bod *A* najdeme jako průsečík:

- kružnice $k(B; c = 4{,}5\text{ cm})$ (bod *A* je od bodu *B* vzdálen 4,5 cm),

- polopřímky B_0X (výška v_b je kolmá na stranu *b*).

Bod *C* pak najdeme na přímce B_0X pomocí délky strany *b*.

Postup konstrukce

1. úsečka BB_0, $|BB_0| = v_b = 3\text{ cm}$.

2. přímka p, $p \perp BB_0$

3. $k(B; c = 4\text{ cm})$

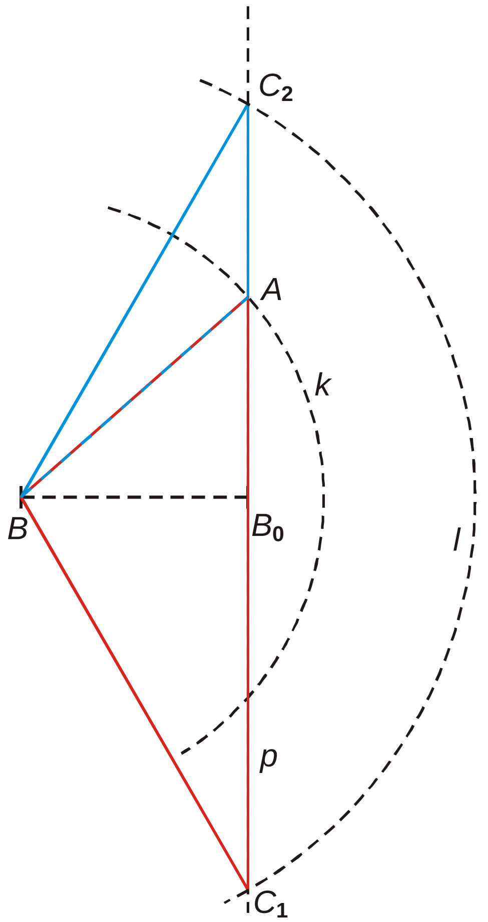
4. bod *A*, $A = p \cap k$

5. $l(B; a = 6\text{ cm})$

6. bod *C*, $C = p \cap l$

6. trojúhelník *ABC*

Konstrukce



Zkouška správnosti

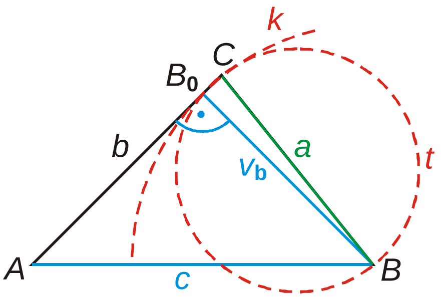
Výsledek odpovídá zadání (u obou trojúhelníků souhlasí všechny tři zadané velikosti).

Diskuse

Příklad má dvě řešení (na přímce *p* najdeme sice dva body *A*, které jsou od bodu *B* vzdáleny o velikost *c*), ale oba jsou osově souměrné podle přímky BB_0. Osově souměrné jsou sice i body C_1 a C_2, které vzniknou jako průsečíky přímky *p* a kružnice *l*, ale protože je spojujeme s bodem *A*, který jsme získali v předchozím kroku a který neleží na přímce BB_0, nezískáme dva shodné osově souměrné trojúhelníky.

Př. 6: Je dána úsečka BC, $|BC| = a = 6\text{ cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $c = 4\text{ cm}$, $v_b = 3\text{ cm}$. V rozboru hledej všechny způsoby řešení.

Rozbor



Stejný trojúhelník jako v předchozím příkladu, ale musíme začít od úsečky BC (úloha je polohová).
Můžeme narýsovat trojúhelník CBB_0, hledáme bod B_0, který leží:

- na kružnici $k(B; v_b = 3\text{ cm})$ (bod B_0 je od bodu B vzdálen o velikost výšky 3 cm),
- na kružnici $t\left(S_{BC}; \left|\frac{BC}{2}\right|\right)$ - Thaletova kružnice – úhel u vrcholu B_0 je pravý.

Bod A pak najdeme na přímce CB_0 pomocí délky strany c.

Postup konstrukce

1. úsečka BC, $|BC| = a = 6\text{ cm}$.

2. kružnice $k(B; v_b = 3\text{ cm})$

3. kružnice $t\left(S_{BC}; \left|\frac{BC}{2}\right|\right)$

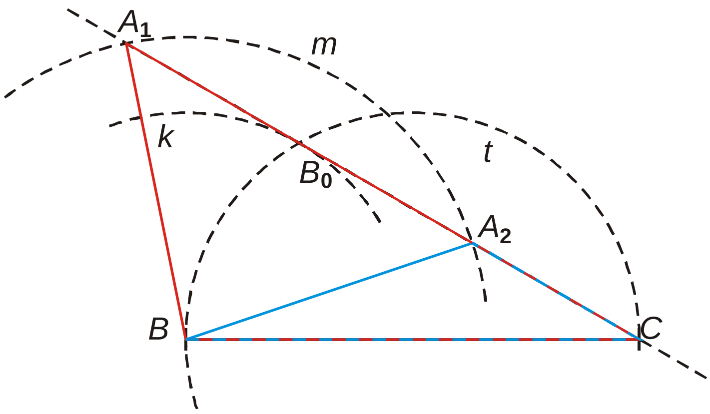
4. bod B_0, $B_0 = t \cap k$

5. kružnice $l(B; c = 4\text{ cm})$

6. bod C, $A = CB_0 \cap l$

6. trojúhelník ABC

Konstrukce



Zkouška správnosti
Výsledek odpovídá zadání (u obou trojúhelníků souhlasí všechny tři zadané velikosti).

Diskuse

Příklad má dvě řešení (na přímce CB_0 najdeme vždy dva body, které jsou od bodu *C* vzdáleny o velikosti *b*). Ze dvou průsečíků kružnic *k* a *t* využíváme pouze jeden, protože druhý je s prvním osově souměrný podle osy *AB* a získali bychom tak z něj trojúhelníky, kterou jsou osově souměrné a tedy shodné s trojúhelníky, které jsme narýsovali).

Shrnutí: V polohových úlohách je předepsán, který prvek sestrojujeme jako první.