3.7.1 Mocniny I

Předpoklady:

Př. 1: Rozepiš mocniny. Pokud je možné je vypočítat, tak je vypočítej.

a) 2^3 b) $(-3)^4$ c) $(-1)^7$ d) 4^{-3}

e) 10^{-2} f) a^3 g) y^{-3} h) x^k

a) $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$ b) $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$

c) $(-1)^7 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$ d) $4^{-3} = \frac{1}{4\cdot 4\cdot 4} = \frac{1}{64}$

e) $10^{-2} = \frac{1}{10\cdot 10} = \frac{1}{100} = 0{,}1$ f) $a^3 = a\cdot a\cdot a$ g) $y^{-3} = \frac{1}{y\cdot y\cdot y}$

h) $x^k = \underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{k \text{ krát}}$

Pedagogická poznámka: Žákům se do rozepisování moc nechce, ale trván na něm, zejména kvůli dalším příkladům (a tak to i zdůvodňuji: „Je třeba, abyste místo 2^3 viděli $2\cdot 2\cdot 2$).
Nepříjemně často se v bodě c) objevuje jako výsledek 7 nebo –7. V takovém případě trván na rozepsání a postupném výpočtu přede mnou.

Př. 2: Doplň větu: „Pokud *a* představuje délku, představuje

a) a^2 … b) a^3 …

a) Pokud *a* představuje délku, představuje a^2 plochu.

b) Pokud *a* představuje délku, představuje a^3 objem.

Př. 3: Doplň tabulku.

x	-2	0,01		-40				0,7	
x^2			0,01		900	0,16	-81		40000

x	-2	0,01	0,1	-40	30	0,4	nejde	0,7	200
x^2	4	0,0001	0,01	1600	900	0,16	-81	0,49	40000

Pedagogická poznámka: Při kontrole se většinou někdo přijde s doplněným záporným číslem v první řádce pro některou kladnou hodnotu v druhé řádce, což využiji k diskusi, která je naznačena pod poznámkou.

Řešení předchozího příkladu není kompletní. Některá pole v prvním řádku mohou obsahovat dvě čísla.

x	-2	0,01	-01; 0,1	-40	-30; 30	-0,4; 0,4	nejde	0,7	-200; 200
x^2	4	0,0001	0,01	1600	900	0,16	-81	0,49	40000

Dvě možnosti máme u všech prázdných políček v prvním řádku, ke kterým patří ve druhém kladné číslo. Vždy totiž existují dvě navzájem opačná čísla, která se po umocnění rovnají stejnému kladnému číslu.
Musíme si však dávat pozor:

- existují dvě čísla, jejichž druhá mocnina se rovná 0,01 (jsou to čísla –0,1 a 0,1),
- pokud se bavíme o druhé odmocnině z čísla 0,01, máme pouze jeden kladný výsledek: $\sqrt{0,01} = 0,1$.

Př. 4: Zapiš jako jednu mocninu.
a) $2^3 \cdot 2^5$ b) $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4$ c) $x^7 \cdot x^2$ d) $2^2 \cdot 4$ e) $a^2 + a^3$ f) $3^2 \cdot 9^2 \cdot 27$

a) $2^3 \cdot 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$

b) $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

c) $x^7 \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^9$

d) $2^2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

e) $a^2 + a^3$ nejde napsat jako jednu mocninu (mezi členy je sčítání a nemůžeme sčítat různé věci dohromady)

f) $3^2 \cdot 9^2 \cdot 27 = 3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9$

Př. 5: Zapiš jako jednu mocninu.
a) $\dfrac{5^8}{5^3}$ b) $\dfrac{7 \cdot 7^4}{7^3}$ c) $\dfrac{a^2 \cdot a^2 \cdot a^3}{a^6}$ d) $\dfrac{2^3 \cdot 2^2}{2^7}$

a) $\dfrac{5^8}{5^3} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$

b) $\dfrac{7 \cdot 7^4}{7^3} = \dfrac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = 7 \cdot 7 = 7^2$

c) $\dfrac{a^2 \cdot a^2 \cdot a^3}{a^6} = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a$

d) $\dfrac{2^3 \cdot 2^2}{2^7} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$

Př. 6: Doplň vzorce pro výpočty s mocninami. Ke každému vzorci napiš zdůvodnění.
a) $a^r \cdot a^s$ b) $a^r + a^s$ c) $\dfrac{a^r}{a^s}$ d) $(ab)^r$ e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$$a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r+s \text{ krát}} = a^{r+s}$$

b) $a^r + a^s$ nejde upravit

$$a^r + a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ krát}} + \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ krát}}$$

c) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{r \text{ krát}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ krát}}} \cdot = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r-s \text{ krát}} = a^{r-s}$$

d) $(ab)^r = a^r b^r$

$$(ab)^r = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{r \text{ krát}} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{r \text{ krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ krát}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{r \text{ krát}} = a^r b^r$$

e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{r \text{ krát}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{r \text{ krát}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{r \text{ krát}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{r \text{ krát}}} = \frac{a^r}{b^r}$$

Shrnutí: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ z toho vyplývá počítání s mocninami.