

3.7.3 Mnohočleny I

Předpoklady: 030702

Pedagogická poznámka: V hodině ukazují hned první příklad. Pokud se nikdo nezeptá, co je mnohočlen, ptám se sám (určitě si to někdo nepamatuje). Následující diskusi však velmi rychle směřuji k cíli, abych neztrácel čas na jiné (důležitější) věci. Maximálně si napíšeme pár příkladů jednočlenů a „nejjednočlenů“, které rychle přetřídíme a z nich rychle sestavíme definici.

Co je mnohočlen?

Všechno, co se dá zapsat jako součet jednočlenů.

Co je jednočlen?

Jednočlen je výraz, který se dá napsat jako:

- číslo,
- proměnná,
- součin čísel a proměnných.

Číslo, které se vyskytuje v jednočlenu, označujeme jako **koeficient**.

Př. 1: Zapiš mnohočleny obvyklým (kompaktním) způsobem.

a) $(-4) \cdot x \cdot x \cdot x - 2 \cdot x \cdot x + 5 \cdot x - 7$

b) $3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 5x \cdot x^2 + 1 \cdot x \cdot x - 0 \cdot x \cdot y + 3y^3$

a) $(-4) \cdot x \cdot x \cdot x - 2 \cdot x \cdot x + 5 \cdot x - 7 = -4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$

b) $3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 5x \cdot x^2 + 1 \cdot x \cdot x - 0 \cdot x \cdot y + 3y^3 = 3x^2y^2 - 5x^3 + x^2 + 3y^3$

Pedagogická poznámka: Objevují se snahy v bodě b) spojit členy $3x^2y^2$ a x^2 (oba obsahují x^2). V takovém případě doporučuji nechat otestovat výsledek (nečastěji $4x^2y^2$ dosazením konkrétních čísel. Například $x = 1$, $y = 2$:

$$3x^2y^2 + x^2 = 3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 + 1^2 = 12 + 1 = 13$$

$$4x^2y^2 = 4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 = 16.$$

Z výsledků je ihned zřejmé, že $4x^2y^2$ není to samé jako $3x^2y^2 + x^2$.

Př. 2: Urči hodnotu mnohočlenu $-x^3 + 2x^2 - 3$ pro: a) $x = 3$, b) $x = -2$, c) $x = 0$.

Mocnina má přednost před násobením (protože je zkráceným zápisem násobení).

a) $x = 3$

$$-x^3 + 2x^2 - 3 = -3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 = -27 + 18 - 3 = -12$$

b) $x = -2$

$$-x^3 + 2x^2 - 3 = -(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 3 = 8 + 8 - 3 = 13$$

c) $x = 0$

$$-x^3 + 2x^2 - 3 = -0^3 + 2 \cdot 0^2 - 3 = -3$$

Pedagogická poznámka: Opět se objevují problémy s dosazením -2 . Rada je stejná jako obvykle – psát závorky a dodržovat pořadí operací.

Př. 3: Popiš, jak sčítáme mnohočleny.

Při sčítání mnohočlenů sečteme koeficienty před členy stejného typu.

Pedagogická poznámka: Řešení předchozího příkladu necháme přečíst několik žáků (třeba třetinu třídy). Tím získáme dva druhy pravidel: „sčítáme stejné jednočleny“, „sčítáme jednočleny stejného typu“. Pak někdo vysvětlí, že mezi „stejně“ a „stejného typu“ je velký rozdíl (a ti, co psali „stejně“ většinou zjistí, že mysleli „stejného typu“).

Př. 4: Sečti mnohočleny.

a) $x^2 - 3x + 1 + 2x^3 + 3x - 2$ b) $-5x^3 + 4x^2 - 2 + (-3x^3 + 5x - 5)$

c) $x \cdot x^2 - \frac{1}{3}x^2 + 0,5x + 2x^2 - x + 5$

a) $x^2 - 3x + 1 + 2x^3 + 3x - 2 = 2x^3 + x^2 - 1$

b) $-5x^3 + 4x^2 - 2 + (-3x^3 + 5x - 5) = -5x^3 + 4x^2 - 2 - 3x^3 + 5x - 5 =$
 $-8x^3 + 4x^2 + 5x - 7$

c) $x \cdot x^2 - \frac{1}{3}x^2 + 0,5x + 2x^2 - x + 5 = x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x^2 - 0,5x + 5 =$
 $= x^3 + \frac{5}{3}x^2 - 0,5x + 5$

Pedagogická poznámka: Občas se objeví žák, který má problém se závorkou v bodu b).

Nejdřív zkusíme závorku odstraňovat jako u mínusu:

$-5x^3 + 4x^2 - 2 + (-3x^3) + (+5x) + (-5)$ z čehož ihned vyplyne, že plus před závorkou nic nemění a může se bez obav vypustit.

Př. 5: Urči součet a rozdíl mnohočlenů $-x^2 + 3x - 5$ a $2x^3 + 3x^2 - 7x - 2$.

Součet: $-x^2 + 3x - 5 + 2x^3 + 3x^2 - 7x - 2 = 2x^3 + 2x^2 - 4x - 7$.

Rozdíl: $-x^2 + 3x - 5 - (2x^3 + 3x^2 - 7x - 2) = -x^2 + 3x - 5 - 2x^3 - 3x^2 + 7x + 2 =$
 $= -2x^3 - 4x^2 + 10x - 3$

Pedagogická poznámka: Objevují se dotazy na to, co vlastně mají žáci udělat. První radou je vypočítat součet a rozdíl pro dvě konkrétní čísla.

Př. 6: Michal i jeho táta se narodili v lednu ve stejný den. Když Michal slavil v roce 2014 narozeniny dával účastníkům oslavy spočítat číslo, které vznikne jako součet roků narození jeho a táty a jejich věku. Urči toto číslo.

Táta:

- rok narození: t ,
- věk v roce 2014: $2014 - t$.

Michal:

- rok narození: m ,
- věk v roce 2014: $2014 - m$.

Součet všech čtyř údajů: $t + 2014 - t + m + 2014 - m = 2014 + 2014 = 4028$.

Bez ohledu na skutečný rok narození táty i Michala vyjde v roce 2014 součet jejich dat narození a věků 4028.

Př. 7: Vyřeš předchozí příklad pomocí proměnných. Označ si rok narození Michala m a rok narození táty t . Vysvětli, jak hádanka funguje.

Táta:

- rok narození: t ,
- věk v roce 2014: $2014 - t$.

Michal:

- rok narození: m ,
- věk v roce 2014: $2014 - m$.

Součet všech čtyř údajů: $t + 2014 - t + m + 2014 - m = 2014 + 2014 = 4028$.

Bez ohledu na skutečný rok narození táty i Michala vyjde v roce 2014 součet jejich dat narození a věků 4028, protože při výpočtu se číslo udávající od jejich věk odečte od čísla, které udává rok narození (o kolik je jejich věk větší o tolik je datum narození menší, pokud tyto dvě čísla sečteme získáme rok, ve kterém výpočet provádíme, v našem případě 2014).

Př. 8: Děti si porovnávají počty vrásek z matematiky. Jako první svůj počet zveřejnila Zuzka (značíme z). Zapiš pomocí proměnné z kolik vrásek má,

- a) Adam, jestliže Zuzka má o dvě víc,
- b) Bára, která má třikrát méně než Zuzka,
- c) Cilka, která má o třetinu více než Zuzka,
- d) Dan, který má o patnáct procent méně než Zuzka,
- e) Eva, která by měla dvakrát víc, kdyby měla Zuzka a jednu méně.

a) Adam, jestliže Zuzka má o dvě víc: $a = z - 2$,

b) Bára, která má třikrát méně než Zuzka: $b = \frac{z}{3}$,

c) Cilka, která má o třetinu více než Zuzka: $c = z + \frac{1}{3}z = \frac{4}{3}z$,

d) Dan, která má o patnáct procent méně než Zuzka: $d = z - \frac{15}{100}z = 0,85z$,

e) Eva, která by měla dvakrát víc, kdyby měla Zuzka a jednu méně: $e = 2(z-1)$.

Př. 9: Na co si musíme dávat pozor při sestavování výrazů ze slovního zadání.

Při vyjadřování pomocí částí a procent musí být vždy část nebo procento z něčeho, nejde o samotná čísla:

- Petra má o třetinu více než Jana: $p = j + \frac{1}{3}j = \frac{4}{3}j$,
- Radek má o 15 % méně než Marek: $r = m - \frac{15}{100}m = 0,85m$.

Př. 10: Zjednoduš.

a) $2a - (a - 2b)$

b) $3x - (2x + x + 1)$

c) $a^2 - 3a + 7 - (-2a^2 + 3a + 1)$

d) $x^2 - (x^2 - [1 - x^2])$

e) $a^2 - 2ab + (-ab) - (-2ab) + (-a^2)$

f) $x^2 - 2x - (2 - 3x - [1 - x^2 - \{2x - 3\}])$

a) $2a - (a - 2b) = 2a - a + 2b = a + 2b$

b) $3x - (2x + x + 1) = 3x - (3x + 1) = 3x - 3x - 1 = -1$

c) $a^2 - 3a + 7 - (-2a^2 + 3a + 1) = a^2 - 3a + 7 + 2a^2 - 3a - 1 = 3a^2 - 6a + 6$

d) $x^2 - (x^2 - [1 - x^2]) = x^2 - (x^2 - 1 + x^2) = x^2 - (2x^2 - 1) = x^2 - 2x^2 + 1 = -x^2 + 1$

e) $a^2 - 2ab + (-ab) - (-2ab) + (-a^2) = a^2 - 2ab - ab + 2ab - a^2 = -ab$

$$x^2 - 2x - (2 - 3x - [1 - x^2 - \{2x - 3\}]) = x^2 - 2x - (2 - 3x - [1 - x^2 - 2x + 3]) =$$

f) $x^2 - 2x - (2 - 3x - [4 - x^2 - 2x]) = x^2 - 2x - (2 - 3x - 4 + x^2 + 2x) = x^2 - 2x - (x^2 - x - 2) =$
 $= x^2 - 2x - x^2 + x + 2 = -x + 2$

Shrnutí: