

3.4.4 Mnohočleny II

Předpoklady: 030403

Pedagogická poznámka: Při hodně je třeba postupovat tak, aby (téměř) všichni stihli prvních pět příkladů a ještě pár minut zbylo na rozbor bodu 5 b). Příklady 6 a 7 jsou úkoly pro rychlejší žáky, většina třídy se používáním vzorců zabývá až v následující hodině.

Př. 1: Jak odečítáme mnohočleny? Předved' na odečtení mnohočlenu $2x^2 - 3x + 7$ od mnohočlenu $3x^2 + 5x - 3$.

Mnohočleny odečítáme tak, že u odečítaného mnohočlenu obrátíme všechna znaménka a získaný mnohočlen přičteme.

Odečítaný mnohočlen: $2x^2 - 3x + 7$.

Obrácení znamének: $-2x^2 + 3x - 7$.

Sečtení mnohočlenů: $3x^2 + 5x - 3 - 2x^2 + 3x - 7 = 3x^2 - 2x^2 + 5x + 3x - 3 - 7 = x^2 + 8x - 10$.

Běžný zápis: $3x^2 + 5x - 3 - (2x^2 - 3x + 7) = 3x^2 + 5x - 3 - 2x^2 + 3x - 7 = x^2 + 8x - 10$.

Zkrácený zápis: $3x^2 + 5x - 3 - (2x^2 - 3x + 7) = x^2 + 8x - 10$.

Př. 2: Zjednoduš.

a) $a^2 + 3a - (2a - 2a^2)$

b) $3x^2 - x + 2 - (2x^3 - 3x + 1) + (x^2 - 4x - 3)$

a) $a^2 + 3a - (2a - 2a^2) = a^2 + 3a - 2a + 2a^2 = 3a^2 + a$

b) $3x^2 - x + 2 - (2x^3 - 3x + 1) + (x^2 - 4x - 3) = 3x^2 - x + 2 - 2x^3 + 3x - 1 + x^2 - 4x - 3 = -2x^3 + 4x^2 - 2x - 2$

Př. 3: Vynásob a znázorni graficky.

a) $x(x+1)$

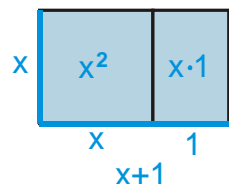
b) $2a(a+2)$

c) $(a+1)^2$

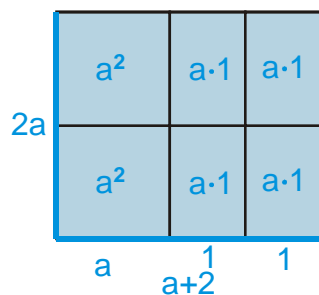
d) $(a+1)(2a+1)$

Popiš jakým způsobem násobíme mnohočleny.

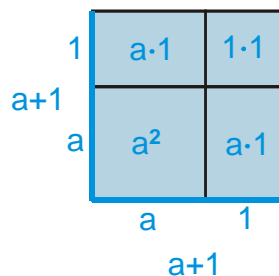
a) $x(x+1) = x^2 + x$



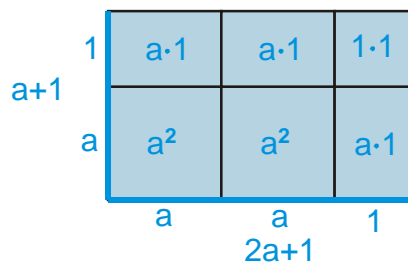
b) $2a(a+2) = 2a^2 + 4a$



c) $(a+1)^2 = (a+1)(a+1) = a^2 + a + a + 1 = a^2 + 2a + 1$



d) $(a+1)(2a+1) = 2a^2 + a + 2a + 1 = 2a^2 + 3a + 1$



Mnohočleny násobíme „každý s každým“. Každý člen prvního mnohočlenu násobíme s každým členem druhého mnohočlenu.

Pedagogická poznámka: Jediným bodem s častějšími chybami ve výpočtu je bod c), kde je třeba nakreslit okomentovat i obrázek (případně nechat žáky nakreslit obrázek, který by popisoval špatný vzorec $(a+1)^2 = a^2 + 1^2$).

Př. 4: Vypočti.

a) $2x(x^2 - 1)$

b) $3a(a^2 - a + 3)$

c) $(x+1)(x-3)$

d) $(2-x)(x+4)$

e) $(x-1)(1-2x-3x^2)$

a) $2x(x^2 - 1) = 2x^3 - 2x$

b) $3a(a^2 - a + 3) = 3a^3 - 3a^2 + 9a$

c) $(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$

d) $(2-x)(x+4) = 2x + 8 - x^2 - 4x = -x^2 - 2x + 8$

e) $(x-1)(1-2x-3x^2) = x - 2x^2 - 3x^3 - 1 + 2x + 3x^2 = -3x^3 + x^2 + 3x - 1$

Př. 5: Zjednoduš.

a) $(x-3)(x+4)+x^2-3x$

b) $(3x+1)(1-2x)-(x+2)(x-4)$

a) $(x-3)(x+4)+x^2-3x = x^2+4x-3x-12+x^2-3x = 2x^2-2x-12$

b) $(3x+1)(1-2x)-(x+2)(x-4) = 3x-6x^2+1-2x-(x^2-4x+2x-8) =$
 $= x-6x^2+1-(x^2-2x-8) = -7x^2+3x+9$

Proč jsme postupovali v bodu 5 b) způsobem uvedeným v řešení?

$(3x+1)(1-2x)-(x+2)(x-4)$: **znaménko mínus patří k celému „číslu“, které vznikne**

jako součin závorek $(x+2)(x-4) \Rightarrow$ proto ho píšeme před společnou závorku, do které obě závorky roznásobíme.

Zadání bychom mohli zapsat i takto:

$$(3x+1)(1-2x) - (x+2)(x-4) = (3x+1)(1-2x) + (-1)(x+2)(x-4)$$

Upravovat se výraz dá i dalšími způsoby, které vedou ke stejnému výsledku:

- $(3x+1)(1-2x) - (x+2)(x-4) = 3x-6x^2+1-2x+(-x-2)(x-4) =$
 $= x-6x^2+1+(-x^2+4x-2x+8) = -7x^2+3x+9$
- $(3x+1)(1-2x) - (x+2)(x-4) = 3x-6x^2+1-2x+(x+2)(-x+4) =$
 $= x-6x^2+1+(-x^2+4x-2x+8) = -7x^2+3x+9$

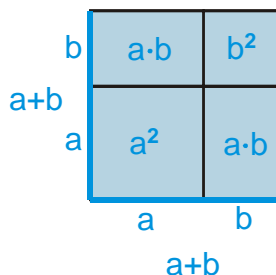
Př. 6: Při úpravách mnohočlenů velmi často určujeme druhé mocniny dvojčlenu (výrazy typu $(x+3)^2$, $(2x+1)^2$ nebo $(2x+5y)^2$). Tyto úpravy je možné si usnadnit pomocí vzorce, který vychází z umocnění dvojčlenu $(a+b)^2$. Najdi tento vzorec, znázorni ho graficky a zkus ho použít na umocnění dvojčlenů v zadání.

Umocňujeme dvojčlen $(a+b)^2$ roznásobením závorek:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tedy můžeme psát rovnou $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Grafické znázornění



Použijeme vzorec:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

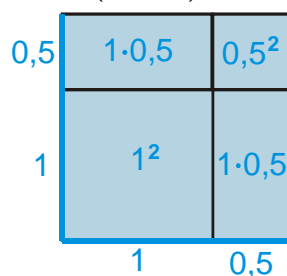
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2x+5y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$$

Př. 7: Dokumentuj graficky i početně vzorec pro umocnění dvojčlenu $(a+b)^2$ na čísle 1,5².

$$1,5^2 = 2,25$$

$$1,5^2 = (1+0,5)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,5 + 0,5^2 = 1+1+0,25 = 2,25$$



Pedagogická poznámka: Následující příklad je domácí procvičování pro žáky, kteří měli v hodině problémy s příklady 1 – 5.

Př. 8: Vypočti.

a) $y^2 - 3y - (3y^2 - 1,2y)$ b) $2x(3x^2 - 2xy + 5y)$ c) $(2a-3)(5-4a)$

d) $(3x-1)^2$ e) $x^2(2x-3) + x(5x^2-3)$ f) $(2x+3)^2 - (2-x)(3x+7)$

a) $y^2 - 3y - (3y^2 - 1,2y) = y^2 - 3y - 3y^2 + 1,2y = -2y^2 - 1,8y$

b) $2x(3x^2 - 2xy + 5y) = 6x^3 - 4x^2y + 10xy$

c) $(2a-3)(5-4a) = 10a - 8a^2 - 15 + 12a = -8a^2 + 22a - 15$

d) $(3x-1)^2 = (3x-1)(3x-1) = 9x^2 - 3x - 3x + 1 = 9x^2 - 6x + 1$

e) $x^2(2x-3) + x(5x^2-3) = 2x^3 - 3x^2 + 5x^3 - 3x = 7x^3 - 3x^2 - 3x$

$$\begin{aligned} \text{f) } (2x+3)^2 - (2-x)(3x+7) &= 4x^2 + 6x + 6x + 9 - (6x + 14 - 3x^2 - 7x) = \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - (-3x^2 - x + 14) = 7x^2 + x - 5 \end{aligned}$$

Shrnutí: