

3.7.5 Mnohočleny III (vzorce)

Předpoklady: 030704

Př. 1: Vypočti.

a) $a^2 - 3a + 7 - (2a^2 - 5a + 3)$

b) $(2-x)(2+3x) + x(3x-5)$

c) $2x(3x-7) - (x+2)^2$

d) $(3a-2)^2 - (2a+1)(3-a)$

a) $a^2 - 3a + 7 - (2a^2 - 5a + 3) = a^2 - 3a + 7 - 2a^2 + 5a - 3 = -a^2 + 2a + 4$

b) $(2-x)(2+3x) + x(3x-5) = 4 + 6x - 2x - 3x^2 + 3x^2 - 5x = -x + 4$

c) $2x(3x-7) - (x+2)^2 = 6x^2 - 14x - (x^2 + 2x + 2x + 4) = 6x^2 - 14x - x^2 - 4x - 4 = 5x^2 - 18x - 4$

d) $(3a-2)^2 - (2a+1)(3-a) = (3a)^2 - 6a - 6a + 2 - (6a - 2a^2 + 3 - a) = 9a^2 - 12a + 2 - (-2a^2 + 5a + 3) = 11a^2 - 17a - 1$

Při úpravách mnohočlenů velmi často určujeme druhé mocniny dvojčlenu (výrazy typu $(x+3)^2$, $(2x+1)^2$ nebo $(2x+5y)^2$). Tyto úpravy je možné si usnadnit pomocí vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, , který vychází z umocnění dvojčlenu $(a+b)^2$.

Vzorec používáme takto:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

V těžším případě:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\left(3x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 9x^4 + 3x^2y + \frac{y^2}{4}$$

Př. 2: Vypočti pomocí vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

a) $(x+5)^2$

b) $(a+7)^2$

c) $(3y+2)^2$

d) $(5x+2y)^2$

e) $\left(u + \frac{1}{2}\right)^2$

f) $(x^2 + 3x)^2$

g) $(2a + 3b)^2$

h) $(2x-3)^2$

a) $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$$\text{b) } (a+7)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 7 + 7^2 = a^2 + 14a + 49$$

$$\text{c) } (3y+2)^2 = (3y)^2 + 2 \cdot 3y \cdot 2 + 2^2 = 9y^2 + 12y + 4$$

$$\text{d) } (5x+2y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 2y + (2y)^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2$$

$$\text{e) } \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 = u^2 + 2 \cdot u \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = u^2 + u + \frac{1}{4}$$

$$\text{f) } (x^2 + 3x)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3x + (3x)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2$$

$$\text{g) } (2a+3b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

$$\text{h) } (2x-3)^2 = [2x+(-3)]^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Př. 3: Odvod' vzorec pro umocňování dvojčlenů ve tvaru $(a-b)^2$. Hledej více způsobů.

Odvození vzorce roznásobením závorky:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Odvození vzorce pomocí vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Př. 4: Vypočti pomocí vzorce $(a-b)^2 = \dots$

$$\text{a) } (x-3)^2$$

$$\text{b) } (3a-2b)^2$$

$$\text{c) } (2y^2-5x)^2$$

$$\text{d) } \left(3b - \frac{2}{3}a\right)^2$$

$$\text{a) } (x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\text{b) } (3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$$

$$\text{c) } (2y^2-5x)^2 = (2y^2)^2 - 2 \cdot 2y^2 \cdot 5x + (5x)^2 = 4y^4 - 20xy^2 + 25x^2$$

$$\text{d) } \left(3b - \frac{2}{3}a\right)^2 = (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot \frac{2}{3}a + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = 9b^2 - 4ab + \frac{4}{9}a^2$$

Př. 5: Dosazením do odpovídajícího vzorce vypočti.

a) $(x-3)^2$ b) $(x+4)^2$ c) $(2x-1)^2$ d) $(3x+2)^2$

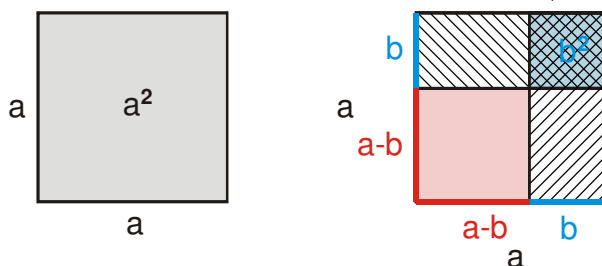
a) $(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

c) $(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$

d) $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Př. 6: Na obrázku je graficky znázorněn vzorec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Vysvětli ho.



Velký čtverec vlevo má obsah a^2 , malý červený vpravo $(a-b)^2$. Červený čtverec získáme z šedého tím, že odečteme dva obdélníky o stranách a, b (a obsahu ab) \Rightarrow získáme výraz $(a-b)^2 = a^2 - 2ab$. Z obrázku je však vidět, že část šedého čtverce o obsahu b^2 byla odečtena dvakrát (náleží do obou obdélníků), je tedy nutno ji k výsledku odčítání přičíst $\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Př. 7: Vyjádři všechny údaje v trojici pomocí jedné zvolené proměnné.

- Martin má o sedm méně než Ota a Pavel má třikrát více než Ota,
- Hynek má o třetinu více než Jarda, který má o pět méně než Eva,
- Adam má o deset procent více než Bára, která má o pět méně než Dana.

a) Martin má o sedm méně než Ota a Pavel má třikrát více než Lukáš

Vyjadřujeme pomocí proměnné o (množství obou zbývajících chlapců jsou popsány vzhledem k Otovi):

- Ota: o ,
- Martin (o sedm méně): $o - 7$,
- Pavel (třikrát více): $3o$.

b) Hynek má o třetinu více než Jarda, který má o pět méně než Eva,

Vyjadřujeme pomocí proměnné j (údaje pro Hynka a Evu jsou popsány pomocí údajů pro Jardu):

- Jarda: j ,
- Eva (o pět více než Jarda, protože Jarda má o pět méně než Eva): $j + 5$,

- Hynek (o třetinu více než Jarda): $j + \frac{j}{3} = \frac{4}{3}j$.

c) Adam má o deset procent více než Bára, která má o pět méně než Dana.

Vyjadřujeme pomocí proměnné b (údaje pro Adama i Danu jsou popsány pomocí údajů pro Báru):

- Adam: $a = b + \frac{b}{100} \cdot 10 = b + \frac{b}{10} = 1,1b$,
- Bára: b ,
- Dana (o pět více než Bára, protože Bára má o pět méně): $b + 5$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je opět procvičování na doma pro ty, kteří v hodině nestíhali.

Př. 8: Vypočti.

a) $2x^2 + 5x - 3 - (x^2 + 2x - 5)$

b) $(3x - 2)(x + 3) - (1 - x)(2x + 5)$

a) $2x^2 + 5x - 3 - (x^2 + 2x - 5) = 2x^2 + 5x - 3 - x^2 - 2x + 5 = x^2 + 3x + 2$

b) $(3x - 2)(x + 3) - (1 - x)(2x + 5) = 3x^2 + 9x - 2x - 6 - (2x + 5 - 2x^2 - 5x) = 5x^2 + 10x - 11$

Př. 9: Dosazením do odpovídajícího vzorce vypočti.

a) $(3 - y)^2$

b) $(2x + 1)^2$

c) $(2a - 5b)^2$

d) $(3x^2 + y)^2$

a) $(3 - y)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + y^2 = 9 - 6y + y^2$

b) $(2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$

c) $(2a - 5b)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 5b + (5b)^2 = 4a^2 - 20ab + 25b^2$

d) $(3x^2 + y)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot y + y^2 = 9x^4 + 6x^2y + y^2$

Shrnutí: Při umocňování mnohočlenů můžeme využít vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ a $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.