3.7.5 Mnohočleny III (vzorce)

Předpoklady: 030704

Př. 1: Vypočti.

a) $a^2-3a+7-\left(2a^2-5a+3\right)$ b) $(2-x)(2+3x)+x(3x-5)$

c) $2x(3x-7)-(x+2)^2$ d) $(3a-2)^2-(2a+1)(3-a)$

a) $a^2-3a+7-\left(2a^2-5a+3\right)=a^2-3a+7-2a^2+5a-3=-a^2+2a+4$

b) $(2-x)(2+3x)+x(3x-5)=4+6x-2x-3x^2+3x^2-5x=-x+4$

c) $2x(3x-7)-(x+2)^2=6x^2-14x-\left(x^2+2x+2x+4\right)=6x^2-14x-x^2-4x-4=$
$=5x^2-18x-4$

d) $(3a-2)^2-(2a+1)(3-a)=(3a)^2-6a-6a+2-\left(6a-2a^2+3-a\right)=$
$9a^2-12a+2-\left(-2a^2+5a+3\right)=11a^2-17a-1$

Při úpravách mnohočlenů velmi často určujeme druhé mocniny dvojčlenu (výrazy typu $(x+3)^2$, $(2x+1)^2$ nebo $(2x+5y)^2$). Tyto úpravy je možné si usnadnit pomocí vzorce $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, , který vychází z umocnění dvojčlenu $(a+b)^2$.

Vzorec používáme takto:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(x+4)^2=x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2=x^2+8x+16$

V těžším případě:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$\left(3x^2+\frac{y}{2}\right)^2=\left(3x^2\right)^2+2\cdot 3x^2\cdot\frac{y}{2}+\left(\frac{y}{2}\right)^2=9x^4+3x^2y+\frac{y^2}{4}$

Př. 2: Vypočti pomocí vzorce $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

a) $(x+5)^2$ b) $(a+7)^2$ c) $(3y+2)^2$ d) $(5x+2y)^2$

e) $\left(u+\frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(x^2+3x\right)^2$ g) $(2a+3b)^2$ h) $(2x-3)^2$

a) $(x+5)^2=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2=x^2+10x+25$

b) $(a+7)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 7 + 7^2 = a^2 + 14a + 49$

c) $(3y+2)^2 = (3y)^2 + 2\cdot 3y\cdot 2 + 2^2 = 9y^2 + 12y + 4$

d) $(5x+2y)^2 = (5x)^2 + 2\cdot 5x\cdot 2y + (2y)^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2$

e) $\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 = u^2 + 2\cdot u\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = u^2 + u + \frac{1}{4}$

f) $(x^2+3x)^2 = (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot 3x + (3x)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2$

g) $(2a+3b)^2 = (2a)^2 + 2\cdot 2a\cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

h) $(2x-3)^2 = \left[2x+(-3)\right]^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot(-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

Př. 3: Odvoď vzorec pro umocňování dvojčlenů ve tvaru $(a-b)^2$. Hledej více způsobů.

Odvození vzorce roznásobením závorky:
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Odvození vzorce pomocí vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
$(a-b)^2 = \left[a+(-b)\right]^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Př. 4: Vypočti pomocí vzorce $(a-b)^2 = \ldots$

a) $(x-3)^2$ b) $(3a-2b)^2$ c) $(2y^2-5x)^2$ d) $\left(3b-\frac{2}{3}a\right)^2$

a) $(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2\cdot 3a\cdot 2b + (2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

c) $(2y^2-5x)^2 = (2y^2)^2 - 2\cdot 2y^2\cdot 5x + (5x)^2 = 4y^4 - 20xy^2 + 25x^2$

d) $\left(3b-\frac{2}{3}a\right)^2 = (3b)^2 - 2\cdot 3b\cdot\frac{2}{3}a + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = 9b^2 - 4ab + \frac{4}{9}a^2$

Př. 5: Dosazením do odpovídajícího vzorce vypočti.

a) $(x-3)^2$ b) $(x+4)^2$ c) $(2x-1)^2$ d) $(3x+2)^2$

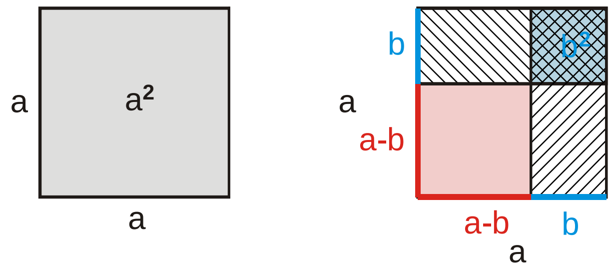
a) $(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(x+4)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

c) $(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$

d) $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Př. 6: Na obrázku je graficky znázorněn vzorec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Vysvětli ho.



Velký čtverec vlevo má obsah a^2, malý červený vpravo $(a-b)^2$. Červený čtverec získáme z šedého tím, že odečteme dva obdélníky o stranách *a*, *b* (a obsahu *ab*) $\Rightarrow$ získáme výraz $(a-b)^2 = a^2 - 2ab$. Z obrázku je však vidět, že část šedého čtverce o obsahu b^2 byla odečtena dvakrát (náleží do obou obdélníků), je tedy nutno ji k výsledku odčítání přičíst $\Rightarrow$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Př. 7: Vyjádři všechny údaje v trojici pomocí jedné zvolené proměnné.

a) Martin má o sedm méně než Ota a Pavel má třikrát více než Ota,
b) Hynek má o třetinu více než Jarda, který má pět méně než Eva,
c) Adam o má deset procent více než Bára, která má o pět méně než Dana.

a) Martin o sedm méně než Ota a Pavel má třikrát více než Lukáš
Vyjadřujeme pomocí proměnné *o* (množství obou zbývajících chlapců jsou popsány vzhledem k Otovi):

- Ota: *o*,
- Martin (o sedm méně): $o-7$,
- Pavel (třikrát více): $3o$.

b) Hynek má o třetinu více než Jarda, který má pět méně než Eva,
Vyjadřujeme pomocí proměnné *j* (údaje pro Hynka a Evu jsou popsané pomocí údajů pro Jardu):

- Jarda: *j*,
- Eva (o pět více než Jarda, protože Jarda má o pět méně než Eva): $j+5$,

- Hynek (o třetinu více než Jarda): $j + \frac{j}{3} = \frac{4}{3} j$.

c) Adam o má deset procent více než Bára, která má o pět méně než Dana.
Vyjadřujeme pomocí proměnné *b* (údaje pro Adama i Danu jsou popsané pomocí údajů pro Báru):

- Adam: $a = b + \frac{b}{100} \cdot 10 = b + \frac{b}{10} = 1{,}1\,b$,
- Bára: b,
- Dana (o pět více než Bára, protože Bára má o pět méně): $b + 5$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je opět procvičování na doma pro ty, kteří v hodině nestíhali.

Př. 8: Vypočti.

a) $2x^2 + 5x - 3 - \left(x^2 + 2x - 5\right)$ b) $(3x-2)(x+3)-(1-x)(2x+5)$

a) $2x^2 + 5x - 3 - \left(x^2 + 2x - 5\right) = 2x^2 + 5x - 3 - x^2 - 2x + 5 = x^2 + 3x + 2$

b) $(3x-2)(x+3)-(1-x)(2x+5) = 3x^2 + 9x - 2x - 6 - \left(2x + 5 - 2x^2 - 5x\right) = 5x^2 + 10x - 11$

Př. 9: Dosazením do odpovídajícího vzorce vypočti.

a) $(3-y)^2$ b) $(2x+1)^2$ c) $(2a-5b)^2$ d) $\left(3x^2+y\right)^2$

a) $(3-y)^2 = 3^2 - 2\cdot 3 \cdot y + y^2 = 9 - 6y + y^2$

b) $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$

c) $(2a-5b)^2 = (2a)^2 - 2\cdot 2a \cdot 5b + (5b)^2 = 4a^2 - 20ab + 25b^2$

d) $\left(3x^2+y\right)^2 = \left(3x^2\right)^2 + 2\cdot 3x^2 \cdot y + y^2 = 9x^4 + 6x^2 y + y^2$

Shrnutí: Při umocňování mnohočlenů můžeme využít vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ a $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.